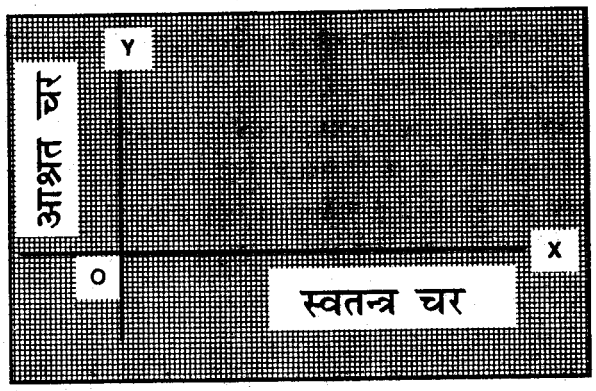


व्यवहार में अधिकतर प्रथम तथा चतुर्थखण्ड का ही उपयोग किया जाता है । बिन्दुरेखीय चित्रों की रचना करते समय कुछ विशेष नियमों का पालन करना आवश्यक होता है ।

बिन्दुरेखीय चित्र की रचना नियम (Rules for constructing a Graph.)

(1) शीर्षक (Heading) – प्रदर्शित किये जाने वाले समंकों के क्षेत्र एवं उनकी विशेषताओं को ध्यान में रखते हुए प्रत्येक बिन्दुरेखीय चित्र का एक संक्षिप्त किन्तु पूर्ण शीर्षक होना चाहिए । शीर्षक में उन्हीं शब्दों का उपयोग करना चाहिए जिनमें समंकों के भाव प्रकट हो जायें । OX और OY अक्षों के लिए भी उपयुक्त शीर्षक अवसर देना चाहिए ।

(2) मूल बिन्दु का स्थान (Place of starting point)– बिन्दुरेखीय पत्र पर मूल बिन्दु (O) के स्थान का निर्धारण OX तथा OY स्तम्भों पर समंकों के विस्तार को देखते हुए स्थान पर करना चाहिए कि बिन्दुरेखीय चित्र के चारों तरफ रिक्त स्थान रहे । आमतौर पर बिन्दुरेखीय पत्र के निचले हिस्से के बायें कोने में कुछ स्थान छोड़कर बिन्दुरेखीय चित्र प्रारम्भ करना चाहिए ।

(3) अक्षों का अनुपात (Proportion of Axes)– बिन्दुरेखीय चित्र का आकार बहुत कुछ प्रयोग में लाये गये अक्षों की लम्बाई के अनुपात पर निर्भर करता है । दोनों अक्षों का आधार अक्ष (OX) तथा कोटि अक्ष (OY) के बीच कौन सा अनुपात हो, इसके सम्बन्ध में कोई निश्चित नियम नहीं है किन्तु आधार अक्ष (OX) की लम्बाई कोटि अक्ष (OY) की लम्बाई से सवा अथवा ड्योढ़ा गुणा अधिक रखना उचित होता है ।

(4) पैमाने का निर्धारण (Selection of scale)–पैमाने के चुनाव का प्रभाव भी बिन्दु-रेखीय चित्र के आकार तथा प्रदर्शन की स्पष्टता पर पड़ता है । पैमाने का चुनाव ऐसा होना चाहिए कि OX तथा OY के बीच का अनुपात बना रहे तथा सभी समंकों को बिन्दुरेखीय पत्र पर स्पष्ट रूप से प्रदर्शित किया जा सके । व्यवहार में लाये गये पैमाने का स्पष्ट वर्णन बिन्दुरेखीय चित्र के ऊपर दायें भाग में पैमाना शीर्षक में कर देना चाहिए ।

(5) स्पष्टता (Vividness)– बिन्दुरेखीय चित्र साफ-सुथरे तथा स्पष्ट होने चाहिए । अगर एक से अधिक चरों को चित्र में दिखाना हो तो उन्हें अलग-अलग रंगों अथवा चिह्नों के माध्यम से दिखाना चाहिए । विभिन्न बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाएँ स्पष्ट होनी चाहिए । सभी स्थानों पर उनकी मोटाई समान होनी चाहिए । आवश्यकता के अनुसार निर्देशांक बना कर इस बात का संकेत दे देना चाहिए कि किस रंग अथवा चिन्ह द्वारा तथ्य को दिखाया गया है ।

(6) कृत्रिम आधार रेखा (False Base-line)–बिन्दुरेखीय चित्र की रचना करते समय कोटि अक्ष का प्रारम्भ शून्य से करना अनिवार्य तो है किन्तु आवश्यकतानुसार कृत्रिम आधार रेखा का भी उपयोग किया जा सकता है । ऐसा करना तब आवश्यक हो जाता है जब आश्रित समंक शून्य से काफी आगे किन्तु एक सीमित दायरे में स्थित हों । ऐसे समंकों के प्रदर्शन में कठिनाई यह होती है कि किसी भी पैमाने से दोनों अक्षों के बीच का अनुपात नियन्त्रित नहीं रह पाता । कभी-कभी तो प्रदर्शन असम्भव भी हो जाता है । ऐसी दशा में (OY) रेखा को मूल बिन्दु (O) से थोड़ा ऊपर काट दिया जाता है । तत्पश्चात आवश्यक संख्या से प्रारम्भ कर एक निश्चित पैमाने का उपयोग करते हैं ।

(7) पेन अथवा पेन्सिल का उपयोग (Use of pen or pencil)–बिन्दुरेखीय चित्र की रचना में पेंसिल का उपयोग करना चाहिए किन्तु सावधानी पूर्वक पतले नोंक वाले पेन का भी उपयोग किया जा सकता है । हर हालत में सावधानी यह रखनी चाहिए कि चित्र गन्दा और अस्पष्ट नहीं हो ।

(8) समंक सारणी (Table of data) – बिन्दुरेखीय चित्र के साथ सम्बन्धित समंकों की सारणी भी बगल में स्पष्ट रूप से लिख देनी चाहिए । इससे समंकों का विस्तृत अध्ययन किया जा सकता है । बिन्दुरेखीय पत्र पर खींचे गये वक्रों की शुद्धता की जाँच करने में भी इससे सुविधा मिलती है ।

(9) चित्र संख्या एवं टिप्पणी (Graph number and notes)– प्रत्येक बिन्दुरेखीय चित्र के नीचे में उसकी क्रम संख्या अवश्य लिख देनी चाहिए । जहाँ अनेक बिन्दुरेखीय चित्र तैयार किये जा रहे हों वहाँ तो चित्र संख्या देना अत्यन्त आवश्यक हो जाता है । आवश्यकतानुसार नीचे में उन बातों के सम्बन्ध में आवश्यक टिप्पणी भी देनी चाहिए जो चित्र द्वारा स्वत: स्पष्ट नहीं हो पाये हों ।

स्रोत (Source)–बिन्दुरेखीय चित्र के अन्त में सबसे नीचे स्रोत का उल्लेख किया जाना चाहिए । जहाँ स्रोत ज्ञात नहीं हो वहाँ अज्ञात स्रोत शब्द का प्रयोग किया जाना चाहिए ।

बिन्दु रेखीय प्रदर्शन के गुण

(1) प्रभावपूर्ण (Effective)–बिन्दुरेखीय चित्र बहुत ही आकर्षक एवं रुचिकर होते हैं । नीरस एवं जटिल समंकों को बिन्दुरेखीय चित्र सजीव बना देते हैं । इनका मनोवैज्ञानिक प्रभाव दर्शकों पर पड़ता है । समस्या का एक खाका दर्शक के मस्तिष्क में खिंच जाता है ।

(2) शीघ्र समझ (Quick Grasp)–बिन्दुरेखीय चित्र सम्बन्धित समस्या के गुणों को स्पष्ट कर देते हैं । उन पर एक नजर डाल कर समस्या को शीघ्र समझा जा सकता है । ये तथ्यों में होने वाले परिवर्तन की दिशा एवं गति को स्पष्ट कर देते हैं ।

(3) बचत (Saving)– बिन्दुरेखीय चित्र के द्वारा कम ही स्थान व समय में विस्तृत एवं जटिल तथ्यों को सरलतापूर्वक दिखाया जा सकता है । इससे प्रस्तुतकर्ता को समय एवं धन की बचत होती है दूसरी तरफ दर्शक भी जटिल तथ्यों को तुरन्त समझ जाते हैं । उनके समय एवं परिश्रम की बचत होती है । अर्थात् बिन्दुरेखीय चित्र प्रस्तुतकर्ता तथा दर्शक दोनों को विभिन्न प्रकार से बचत करते हैं ।

(4) तुलनात्मक अध्ययन (Comparative study)–बिन्दुरेखीच चित्र दो या अधिक तथ्यों के बीच तुलनात्मक अध्ययन को सरल एवं रोचक बना देते हैं । एक साथ नजर के सामने सभी तथ्यों की विशेषताएँ स्पष्ट हो जाती हैं । उनके बीच का सह-सम्बन्ध भी स्पष्ट हो जाता है ।

(5) विभिन्न सांख्यिकीय मापों की जानकारी (Knowledge of different statistical measures)–बिन्दुरेखीय चित्रों की मदद से विभिन्न सांख्यिकीय मापों की जानकारी प्राप्त की जा सकती है । इसके द्वारा स्थिति सम्बन्धी माध्यों को सरलतापूर्वक अनुमान लगाया जा सकता है । आन्तरगणन, बाह्यगणन एवं पूर्वानुमान का कार्य इनके सहारे काफी सरल हो जाता है । चक्रीय एवं मौसमी परिवर्तनों को बिन्दुरेखीय चित्रों के सहारे सरलतापूर्वक स्पष्ट किया जा सकता है । अत: बिन्दुरेखीय चित्र समंकों के प्रदर्शन एवं विश्लेषण दोनों में सहयोगी होते हैं ।

बिन्दुरेखीय प्रदर्शन की सीमाएँ एवं दोष (Limitations and demerits of Graphical presentation) :

(1) प्रवृत्ति (Trend) : बिन्दुरेखीय चित्र समंकों की सामान्य प्रवृत्ति को बताते हैं । वास्तविक मूल्यों की हू-ब-हू जानकारी इनसे नहीं प्राप्त की जाती है ।

(2) भ्रामक प्रभाव (Illustive Effect) : बिन्दुरेखीय चित्रों की मदद से समंकों का भ्रामक चित्र आसानी से खींचा जा सकता है । यह कार्य जानबूझ कर अथवा अनजाने में भी किया जा सकता है । मापदण्ड में थोड़ा परिवर्तन करके वक्रों के आकार एवं प्रकृति में महत्त्वपूर्ण परिवर्तन किया जा सकता है, भ्रामक निष्कर्ष निकाला जा सकता है तथा दर्शकों को धोखा दिया जा सकता है ।

(3) अस्थिरता (Instability) : बिन्दुरेखीय चित्रों में अस्थिरता का दोष भी पाया जाता है । समान समंक को अलग-अलग व्यक्ति भिन्न मापदण्डों का उपयोग कर अलग-अलग ढंग से प्रस्तुत कर सकते हैं । इनका उपयोग प्रस्तुतकर्ता अपने मन की बात चित्रित करने में कर सकता है । इससे अलग-अलग अर्थ भी निकाले जा सकते हैं ।

(4) उद्धरण (Quotation) – बिन्दुरेखीय चित्रों को किसी तथ्य की पुष्टि के लिए उद्धृत करना सम्भव नहीं होता है ।

उपर्युक्त कमियों के अतिरिक्त बिन्दुरेखीय चित्र का उपयोग सभी प्रकार के समंकों के लिए नहीं किया जा सकता । किसी तथ्य की सभी विशेषताओं को एक ही बिन्दुरेखीय चित्र द्वारा दिखाना कठिन होता है क्योंकि इससे चित्र की जटिलता बढ़ जाती है तथा समझने में परेशानी होती हैं । यही कारण है कि अनेक बिन्दुरेखीय चित्रों को कोई महत्व नहीं देते हैं ।

(चित्र (Diagram) तथा बिन्दुरेखीय चित्र (Graphs) में अन्तर:)

(1) क्षेत्र (Scope) : सांख्यिकीय चित्र स्थान संबंधी श्रेणियों के लिए मुख्यत: व्यवहार में लाये जाते हैं तो काल श्रेणी तथा आवृत्ति-वितरणों को प्रदर्शित करने के लिए बिन्दुरेखीय चित्र व्यवहार में लाये जाते हैं ।

(2) रचना (Construction) : बिन्दु-रेखीय चित्र की रचना के लिए विभिन्न बिन्दुओं एवं रेखाओं का उपयोग किया जाता है । इनकी रचना बिन्दुरेखीय पत्र पर की जाती है । किन्तु चित्र सादे कागज पर भी बनाये जा सकते हैं । चित्रों के लिए दण्ड, आयात, वर्ग, वृत्त आदि विशिष्ट आकृतियों का उपयोग किया जाता है ।

(3) उद्देश्य (Porpose) : बिन्दु-रेखीय चित्र चरों के बीच गणितीय संबंध के अध्ययन की सहायता से करते हैं जबकि चित्रों का उद्देश्य चरों के तुलनात्मक अध्ययन को सम्भव बनाना है ।

(4) सूचना (Information) : बिन्दुरेखीय चित्र किसी तथ्य से संबंधित सूचनाएँ अधिक स्पष्ट, संक्षिप्त तथा शुद्ध रूप में देते हैं जबकि सांख्यिकीय चित्र केवल औसत जानकारी देते हैं ।

(5) सरलता (Simplicity) : रचना की दृष्टि से बिन्दुरेखीय चित्र अधिक सरल होते हैं । इनको बनाने में चित्रों की अपेक्षा कम समय लगता है ।

बिन्दुरेखीय चित्र के प्रकार (Kinds of Graph)

बिन्दुरेखीच चित्रों को निम्नलिखित दो वर्गों में बाँटा जाता है :

(1) कालिक बिन्दु-रेखीय चित्र (Graph of time series of Historigram) और

(2) आवृत्तिवितरण सम्बन्धी बिन्दुरेखीय चित्र (Graph of frequency series of frequency graph)

(1) कालिक बिन्दुरेखीय चित्र (Graph of time series of Historigram) : समय की किसी भी इकाई जैसे वर्ष, माह, दिन, घंटा आदि के आधार पर किसी तथ्य के व्यवस्थित मानों को ही काल श्रेणी कहा जाता है । जब किसी काल श्रेणी को बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित किया जाय तो उसे कालिक बिन्दुरेखीय चित्र कहते हैं । इसे ऐतिहासिक चित्र भी कहते हैं इसके अन्तर्गत स्वतन्त्र चर अर्थात् समय की इकाई (OX) रेखा पर तथा आश्रित चर के मानों को कोटि अक्ष (OY) पर दिखाया जाता है । आश्रित चरों की संख्या के आधार पर कालिक बिन्दु-रेखीय चित्र निम्नलिखित प्रकार के होते हैं ।

(क) एकचरीय बिन्दुरेखीय चित्र (Graph of one variable)

(ख) बहुचरीय बिन्दुरेखीय चित्र (Graph of more than one variable)

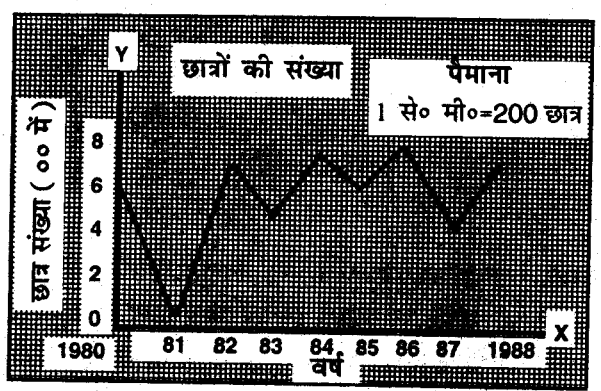
(क) एक चरीय बिन्दुरेखीय चित्र (Graph of one variable) – जब किसी काल श्रेणी में एक ही तथ्य के मानों का वर्णन किया जाय तो उसे एक चरीय काल श्रेणी तथा इससे बने बिन्दु-रेखीय एक चरीय बिन्दुरेखीय चित्र को स्पष्ट किया जा सकता है ।

निम्न उदाहरण से एक चरीय काल श्रेणी तथा एक चरीय बिन्दुरेखीय चित्र को एक चरीय विन्दुरेखीय चित्र कहा जाता है ।

उदाहरण 1

निम्नांकित समंकों को बिन्दुरेखीय चित्र द्वारा प्रदर्शित करें ।

वर्ष	छात्रों की संख्या
1980	500
1981	100
1982	700
1983	450
1984	800
1985	600
1986	00
1987	400
1988	00



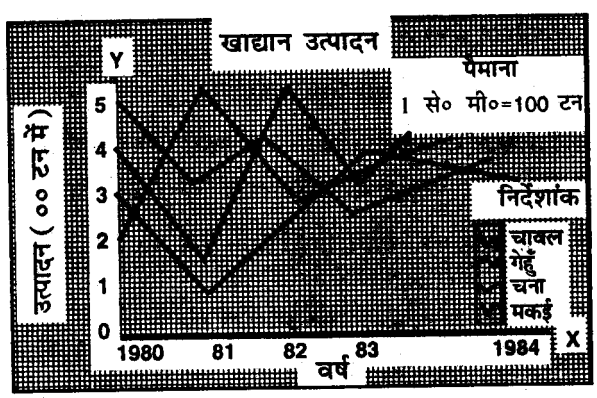
हल-

(ख) बहु-चरीय बिन्दुरेखीय चित्र (Graph of more than one variable) - जब समय की किसी एक इकाई के आधार पर विभिन्न सजातीय चरों के मान व्यवस्थित रूप में प्रांकित किये जायें तो उसे बहु-चरीय काल श्रेणी कहा जायेगा तथा ऐसे समंकों को बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित कर बहु-चरीय बिन्दुरेखीय चित्र बनाया जाता है । ऐसे चित्र एक ही साथ अनेक तथ्यों के विषय में जानकारी देते हैं । प्रत्येक तथ्य को अलग रंग अथवा चिन्ह द्वारा दिखाया जाता है । ऐसे चित्रों के साथ निर्देशांक अवश्य दिया जाता है । ऐसे चित्र विभिन्न तथ्यों के बीच तुलनात्मक अध्ययन को सरल बना देते हैं । इसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण 2

खाद्य मंत्रालय से प्राप्त निम्न समंकों को बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित करें ।

वर्ष	चावल	गेहूँ	चना	मकई
1980	400	900	300	500
1981	100	500	50	300
1982	500	300	200	400
1983	300	400	400	200

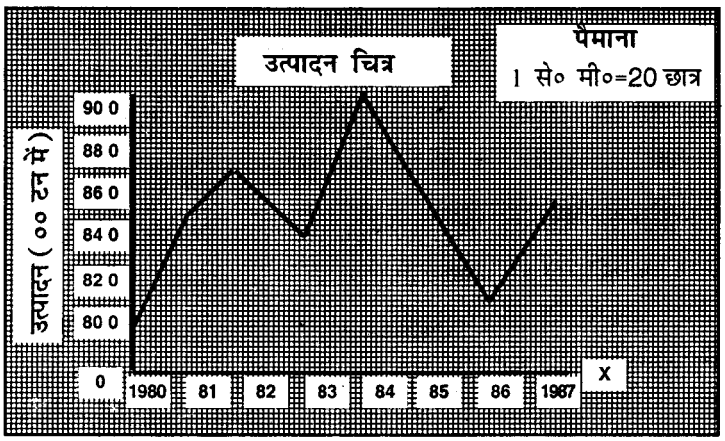


कृत्रिम आधार रेखा (False base line) : बिन्दु-रखाय ाचत्र का रचना मूल बिन्दु से ही प्रारम्भ की जाती है किन्तु जब भी दिये गये समंक शून्य से काफी अन्तर पर प्रारम्भ हों तब बिन्दुरेखीय चित्र को शून्य से प्रारम्भ करके सतत् पैमाने पर दिखाने में कठिनाई होती है । चित्र अनावश्यक रूप से ऊँचा हो जाता है । कभी-कभी तो ऐसा चित्र बनता है जो देखने में भद्दा तथा ऊपर टंगा हुआ दीखता है । इससे ग्राफ पेपर की भी बर्बादी होती है । काफी स्थान रिक्त छोड़ना पड़ता है । निम्न उदाहरण से स्थिति पूर्णत: स्पष्ट की जा सकती है :

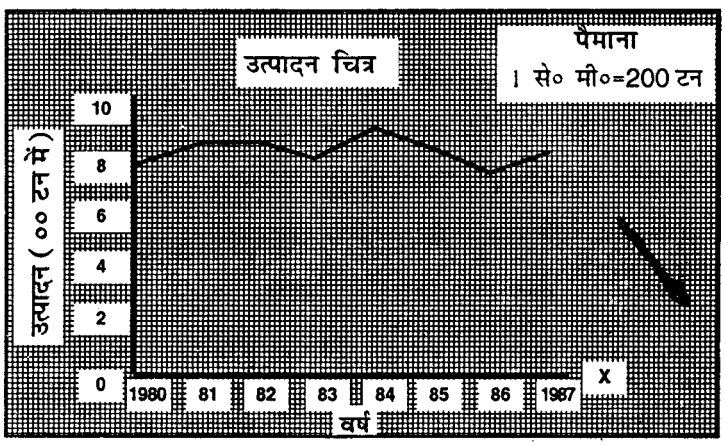
निम्न समंकों को बिन्दुरेखीय चित्र द्वारा दिखावें ।

वर्ष:	1980	81	82	83	84	85	86	1987
उत्पादन (टन में)	800	850	870	840	900	860	800	850

हल-



ऊपर के चित्र में हम देख रहे हैं कि बिन्दुरेखा मूल बिन्दु (O) से काफी दूर प्रारम्भ हुआ है तथा सीमित दायरे में बढ़ता घटता है । चित्र ऊपर टंगा हुआ दीखता है । उसके नीचे का स्थान बेकार पड़ा है । देखने में भी यह आकर्षक नहीं लगता । अगर पैमाना और बढ़ा दिया जाय तो ग्राफ और भी सिमट जा सकता है । इसके विपरीत अगर पैमाना और छोटा कर दिया तो चित्र और भी ऊँचा टंग जा सकता है । दोनों ही स्थितियां अनुपयुक्त होंगी । ऐसे में चित्र बनाने के लिए कृत्रिम आधार रेखा का उपयोग उपयुक्त होता है । इसमें मूल बिन्दु से प्रारम्भ करने के पश्चात् (OY) अक्ष को तोड़ दिया जाता है । तोड़ने के लिए दो तीखी रेखाओं का उपयोग किया जाता है । तत्पश्चात आवश्कतानुसार पैमाना निर्धारण कर लिया जाता है जिससे कि कागज भी बर्बाद नहीं हो तथा चित्र भी आकर्षक एवं स्पष्ट बना रहे । उदाहरण संख्या 3 के समंकों को कृत्रिम आधार रेखा का उपयोग करके निम्न प्रकार दिखाया जा सकता है-



ऊपर के चित्र से स्पष्ट है कि शून्य के पश्चात् (OY) को किस प्रकार तोड़ दिया गया है तथा दिये गये समंकों के न्यूनतम मान (800) से प्रारम्भ करते हुए 20 का पैमाना लेकर सभी समंकों को दिखाया गया है । इसके कारण तथ्य में हो रहे परिवर्तन की काफी जानकारी प्राप्त हो रही है । अत: आवश्यकतानुसार इस तकनीक का उपयोग बिन्दुरेखीय चित्र बनाते हुए अवश्य करना चाहिए ।

अब हमलोग अगले पाठ में आवृत्ति वितरणों से सम्बन्धित बिन्दुरेखीय चित्रों के विषय में चर्चा करेंगे ।

1. समंकों के बिन्दु रेखीय प्रदर्शन के गुणों और सीमाओं का वर्णन करें ।

   Describe the merits and limitations of graphical presentation of data.

2. कृत्रिम आधार रेखा से आप क्या समझते हैं ? इसकी उपयोगिता बतावें तथा एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करें ।

   What do you understand by false base line ? Explain its utility witjh a suitable example.

3. गत 7 वर्षों में चावल के उत्पादन का आँकड़ा निम्न प्रकार है-

वर्ष:	1982	1984	1985	1986	1987	1988
उत्पादन (टन में) :	400	405	408	406	420	414

उपयुक्त समंकों को उपयुक्त बिन्दुरेखीय चित्र द्वारा दिखावें ।

4. Present the following with the help of a suitable graph.

(In rupees)

Year	Income	Expenditure	Savings
1970	400	300	100
1971	300	250	50
1972	800	500	300
1973	200	400	200
1974	600	700	100
1975	1200	1000	200
1976	500	550	50
1977	750	700	50
1978	100	800	200

5. Represent the following production figures graphically (In tonnes_

Year	Cereals	Pulses	Sugar	Oilseeds.
1985	443	424	430	490
1986	465	535	446	495
1987	470	450	475	665
1988	483	507	628	680
1989	450	480	450	440
1990	560	490	480	570

6. निम्न समंकों को उपयुक्त बिन्दुरेखीय चित्र द्वारा दिखावें -

Year	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
Production (In tonnes):	212	220	257	290	263	250	280	300

7. From the index numbers given below draw a suitable graph

Index numbers of Month	Index numbers of prices in Patna	Prices in Bombay
Jan 1980	167	204
Feb.	182	222
March.	182	225
Apr.	192	228
May.	198	231
June.	211	233
July.	227	249
Aug.	238	260
Sept.	250	255
Oct.	253	255
Nov.	260	240
Dec. 1980	250	245

●

पाठ - 10

केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप

(Measures of central Tendency)

प्रिय छात्रो,

हम जानते हैं कि सांख्यिकी के अन्तर्गत किसी समस्या का संख्यात्मक अध्ययन किया जाता है । इसके लिए अध्ययन की विषय-वस्तु से सम्बन्धित आँकड़ों के विशाल समूह की आवश्यकता पड़ती है । आँकड़ों के ऐसे विशाल समूह को सरल, संक्षिप्त एवं बोधगम्य बनाने के लिए वर्गीकरण, चित्रमय व बिन्दु-रेखीय प्रदर्शन आदि का उपयोग किया जाता है । उन्हें आवृत्ति वितरणों के माध्यम से प्रस्तुत किया जाता है । किन्तु ये सभी नाकाफी सिद्ध हो जाते हैं । ये उपाय विशाल संख्यात्मक समूह को सरल तो बनाते हैं किन्तु उन्हें सरलतम रूप नहीं दे पाते । आँकड़ों की सभी महत्वपूर्ण विशेषताओं को ये स्पष्ट नहीं कर पाते । फिर, इन तथ्यों के विशाल समूह से निष्कर्ष निकालना एक अत्यन्त कठिन कार्य है क्योंकि मानव मस्तिष्क जटिल समंकों को भली-भाँति समझने और उनका तुलनात्मक अध्ययन करने में सर्वथा असमर्थ होता है । रोनाल्ड फिशर महोदय ने ठीक ही कहा है कि "The inherent inability of the human mind to grasp in its entirety a large body of numerical data compels us to seek relatively few constants that will adequately describe the data."

अर्थात् संख्यात्मक तथ्यों के विशाल समूह पूरी तरह समझ सकने की मानव मस्तिष्क की अन्तर्निहित अयोग्यता, हमें किसी ऐसे अपेक्षाकृत संक्षिप्त-स्थिर माप की खोज के लिए बाध्य करती है, जो समंकों की पर्याप्त रूप से व्याख्या कर सके । अत: समंकों की कुछ ऐसी संक्षिप्त मापों की गणना करना आवश्यक होता है जो उनकी मूल विशेषताओं अर्थात् केन्द्रीय प्रवृत्ति को स्पष्ट कर सके । सांख्यिकीय विश्लेषण में ऐसा एक आवश्यक व महत्वपूर्ण माप माध्य होता है । माध्य एक ऐसा सांख्यिकीय माप है जो विशाल समंक समूह को मात्र एक संख्या में संक्षिप्त कर देता है, जो समूह का प्रतिरूप तथा प्रतिनिधि संख्या होता है ।

माध्य का अर्थ एवं परिभाषा

माध्य किसी समंक-श्रेणी का एक ऐसा विशिष्ट मूल्य है जिसके आस-पास अन्य समंकों के केन्द्रित होने की प्रवृत्ति पाई जाती हैं । यह श्रेणी के सीमान्त-पदों के बीच स्थित एक ऐसी संख्या है जो वितरण के मध्य भाग में मूल्यों के जमाव की जानकारी देती है । इसलिए इसे केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप भी कहा जाता है क्योंकि व्यक्तिगत चर-मूल्यों का जमाव अधिकतर उसके आस-पास ही होता है । अत: माध्य सम्पूर्ण वितरण की अभिव्यक्ति का एकमात्र सार्थक प्रतिनिधि मूल्य होता है । यह एक ऐसी सरल एवं संक्षिप्त संख्या है जो समंक-श्रेणी की अधिकांश प्रमुख विशेषताओं पर प्रकाश डालती है । विभिन्न विद्वानों ने माध्य को अपने शब्दों में निम्न प्रकार से परिभाषित किया है-

क्लार्क एवं शकाडे के अनुसार, "Average is an attempt to find one single figure to describe whole group of figures." अर्थात् माध्य, समंकों के समंकों के सम्पूर्ण समूह का वितरण करने हेतु, कोई अकेला अंक प्राप्त करने का प्रयास है ।

प्रो० क्राक्सटन ब्राउडन ने कहा है कि, "An average is a single value within the range of the data that is used to represent all the values in the series. since an average is somewhere within the range of the data, it is sometimes called a measure of central value." अर्थात् माध्य समंकों के विस्तार के अन्तर्गत स्थित ऐसा मूल्य है जिसका प्रयोग श्रेणी के सभी मूल्यों का प्रतिनिधित्व करने के लिए किया जाता है । चूँकि माध्य समंकों के अन्तर्गत ही होता है, इसलिये इसे केन्द्रीय मूल्य का माप भी कहा जाता है ।

सिम्पसन एवं काफका के अनुसार, 'A measure of central tendency is a typical value around which other figures congregate.' अर्थात् केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप एक ऐसा प्रतिरूपी मूल्य है जिसके चारों ओर अन्य संख्यायें संकेन्द्रित होती हैं ।

उपर्युक्त परिभाषाओं ये यह स्पष्ट है कि कोई अकेली ऐसी संख्या जो श्रेणी के सभी समंकों का प्रतिनिधित्व करती है, माध्य कहलाती है । माध्य में वे सभी विशेषताएँ होती हैं जो श्रेणी के अन्य मूल्यों में पायी जाती हैं । इसे विभिन्न नामों से पुकारा जाता है जैसे केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप, सांख्यिकीय माध्य, प्रतिनिधि मूल्य इत्यादि । इसे उसी इकाई में व्यक्त किया जाता है जिसमें प्रारम्भिक समंक संग्रहित होते हैं ।

सांख्यिकीय अध्ययन में माध्य का स्थान काफी महत्वपूर्ण है । सांख्यिकीय विश्लेषण के अधिकांश तकनीक इसी पर आधारित हैं । यही कारण है कि सांख्यिकीय विज्ञान की परिभाषा देते हुए डा० बाउले ने कहा है कि, 'Statistics is the science of average.' अर्थात् सांख्यिकी विज्ञान की परिभाषा देते हुए बाउले ने कहा है कि, 'Statistics is the science of average.' अर्थात् सांख्यकीय माध्यों का विज्ञान है । सांख्यिकी के ही समान माध्य भी व्यक्तिगत विशेषताओं की ओर ध्यान न देते हुए सामूहिक गुणों को विशेष महत्व प्रदान करते हैं । यह एक ऐसा माप होता है जिसे वितरण की अधिक-से-अधिक इकाइयों पर लागू किया जा सकता है ।

माध्य के उद्देश्य एवं कार्य

(Object and Functions of Averages)

आधुनिक युग में सांख्यिकीय माध्य का महत्त्व दिन-प्रतिदिन बढ़ता जा रहा है । हम प्रत्येक समस्या का अध्ययन सदैव औसत रूप में ही करते हैं । उदाहरण के लिए औसत आय, औसत व्यय, औसत आयु, औसत उत्पादन, औसत लागत, औसत लाभ, औसत तापमान इत्यादि । इन मापों का महत्व किसी एक व्यक्ति या वस्तु के लिए नहीं बल्कि सम्पूर्ण राष्ट्र एवं समाज के लिए होता है । आर्थिक नियोजन का तो आधार ही औसत है । आज कोई भी शास्त्र व विद्या नहीं जहाँ माध्यों का उपयोग नहीं होता हो । ज्योतिष विद्या से लेकर भौतिक शास्त्र तक तथा मनोविज्ञान से अर्थशास्त्र तक सभी आधुनिक शास्त्र पूरी तरह से माध्यों पर निर्भर हैं । अत: सांख्यिकी माध्य के उद्देश्यों एवं कार्यों की सूची काफी बड़ी है किन्तु उन्हें संक्षिप्त रूप में निम्न प्रकार प्रकट किया जा सकता है ।

1. <u>सरल एवं संक्षिप्त चित्र प्रस्तुत करना</u> (To present simple and concise picture)– अव्यवस्थित व जटिल सांख्यिकीय सामग्री का सुव्यवस्थित, सरल, संक्षिप्त एवं बोधगम्य रूप में प्रस्तुत करना संख्यिकीय माध्य का प्रथम उद्देश्य एवं कार्य है । माध्य समंकों के विशाल समूह को एक संख्या में बदल देता है । यह हमें श्रेणी का सारांश उपलब्ध करता है और समंकों के विशाल समूह पर विहंगम दृष्टिपात की सुविधा प्रदान करता है । देश के सभी नागरिक की आय की अपेक्षा औसत आय को समझना तथा याद रखना अधिक सरल होता है ।

2. तुलनात्मक अध्ययन की सुविधा प्रदान करना (To facilitate comparative study) – सांख्यिकीय माध्य दो या दो से अधिक समूहों के तुलनात्मक अध्ययन को सरल बना देते हैं । प्रत्यक्ष समंकों द्वारा यह कार्य कठिन है किन्तु माध्य इसे सरल बना देता है । उदहारण के लिए दो नगरों के सभी नागरिकों के स्वास्थ्य सम्बन्धी समंकों को देखकर कोई निष्कर्ष निकालना कठिन है किन्तु दोनों की औसत आयु की तुलना करके निष्कर्ष आसानी से निकाला जा सकता है ।

3. समग्र का प्रतिनिधित्व (To Represent the whole Group)–माध्य, सम्पूर्ण समूह का संक्षिप्त चित्र होता है । इसकी सहायता से समूह के विषय में सहज अनुमान लगाया जा सकता है ।

4. नीति-निर्माण में सहायक (To help in policy formation) – माध्य के रूप में हमें ऐसी संख्याएँ प्राप्त हो जाती हैं जो भावी योजनाओं के निर्माण और नीतियों के निर्धारण में हमारा मार्गदर्शन करती हैं । इनसे भावी अनुमान लगाने और निर्णय लेने का कार्य भी काफी सरल हो जाता है ।

5. सांख्यिकीय विश्लेषण का आधार (Basis of statistical Analysis)– सांख्यिकीय विश्लेषण की अनेक विधियाँ माध्यों पर ही आधारित हैं ।

अच्छे माध्य के आवश्यक तत्त्व

(Essentials of a Good Average)

माध्य एक ऐसा मूल्य होता है जो मूल्यों के एक समूह का प्रतिनिधत्व करता है अत: उसमें कुछ गुणों का विद्यमान होना आवश्यक है । प्रो० जे० कैन तथा ई० एस० कीपिंग (Prof. J. F. Kenney and E. S. Keeping) के अनुसार एक सन्तोषजनक माध्य में निम्नलिखित आवश्यक गुण होने चाहिए-

(1) उसे स्थिर रूप से परिभाषित किया जाय ।

(2) उसकी गणना करना सरल हो ।

(3) उसका सरल निर्वचन किया जा सके ।

(4) सभी अवलोकित मूल्यों पर आधारित हो ।

(5) वितरण के कुछेक बड़े अथवा छोटे मूल्यों से अनुचित रूप से प्रभावित न हो ।

(6) उसी आकार के तथा उसी समग्र से लिए गये एक से अधिक न्यादर्शो के माध्यों में अन्तर बहुत कम हो ।

(7) यह गणितीय विवेचन के योग्य हो ।

प्रो० यूल एवं कैण्डाल के अनुसार एक अच्छे माध्य में निम्नलिखित गुण होने चाहिए :

1. स्पष्ट एवं स्थिर परिभाषा (Clearly and rigidnly defined) – माध्य को स्पष्टत: परिभाषित होना चाहिए ताकि उसका केवल एक ही अर्थ लगाया जा सके । यदि परिभाषा अस्पष्ट व संदिग्ध है तो निश्चित ही माध्य-मूल्य का अर्थ भिन्न-भिन्न लगाया जायेगा और तब वह वितरण का सही प्रतिनिधित्व नहीं कर सकेगा ।

2. सभी मूल्यों पर आधारित (Based on all the observations)– एक अच्छे माध्य को श्रेणी के सभी पदों पर आधारित होना चाहिए अर्थात् उसकी गणना के समय सभी पदों का प्रयोग होना चाहिए । यदि ऐसा नहीं है तो फिर वह माध्य समंक श्रेणी का सच्चा प्रतिनिधि नहीं माना जा सकता ।

3. समझने व गणना में सरल (Easy to understand and calulate)– माध्य ऐसा होना चाहिए कि जिसे साधारण व्यक्ति भी समझ सके और उसका आगणन आसानी से किया जा सके । माध्य को अत्यधिक गणितीय (highly mathematical) भी नहीं होना चाहिए अन्यथा उसकी लोकप्रियता कम हो जाती है, उसका उपयोग कम हो जाता है ।

4. बीजगणितीय विवेचन के लिए अनपयुक्त (Suitable for algebric treatment)– एक अच्छे माध्य में कुछ ऐसी गणितीय विशेषताएँ होनी चाहिए कि जिससे उसका आगे बीजगणितीय विवेचन सम्भव हो सके । यदि माध्य में यह विशेषता नहीं है तो सांख्यिकीय सिद्धान्त में उसका अनुप्रयोग सीमित बना रहेगा । उदाहरण के लिए यदि विभिन्न समूहों के माध्य, मूल्य और आवृत्तियाँ ज्ञात हैं तो उनसे उन समूहों का सामूहिक माध्य भी निर्धारित हो जाना चाहिए ।

5. प्रतिचयन में परिवर्तन का न्यूनतम प्रभाव (Least effect of sampling fluctuations)–इससे आशय यह है कि यदि एक ही समग्र में से दैव आधार पर समान आकार के कई प्रतिदर्श चुनकर उनके माध्य निकाले जायें तो माध्यों में अधिक अन्तर नहीं होना चाहिए । यदि माध्य आदर्श है तो एक ही समग्र में से लिये गये विभिन्न न्यादर्शों के माध्यों में काफी हद तक समानता होगी । दूसरे शब्दों में प्रतिचयन परिवर्तनों का प्रभाव न्यूनतम होगा ।

6. चरम मूल्यों का न्यूनतम प्रभाव (Least effect of extreme observations)– चरम मूल्यों से आशय समंक श्रेणी के अत्यधिक छोटे व अत्यधिक बड़े मूल्यों से है । इन चरम मूल्यों से एक आदर्श माध्य को प्रभावित नहीं होना चाहिए ।

केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न माप

(Various Measures of Central Tendency)

केन्द्रीय प्रवृत्ति के प्रमुख माप निम्नलिखित हैं :

1. बहुलक (Mode)
2. मध्यका (Median)
3. समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)
4. गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)
5. हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)

अब हमलोग उपर्युक्त माध्यों का एक-एक करके विस्तृत अध्ययन करेंगे ।

1. बहुलक (Mode)

अंग्रजी शब्द (Mode) की उत्पत्ति फ्रेंच भाषा के शब्द "La mode" से हुई है जिसका अर्थ है फैशन या रिवाज अर्थात् जिसका प्रचलन अधिक हो । सांख्यिकी में भी Mode शब्द का यही अर्थ लिया जाता है । अतः बहुलक किसी समंक-माला में अधिकतम आवृत्ति वाला पद होता है अथवा यह उस बिन्दु को बताता है जहाँ सबसे अधिक पद संकेन्द्रित होते हैं । इस प्रकार बहुलक घनत्व की स्थिति, सर्वाधिक आवृत्ति वाले पद का मूल्य या मूल्यों के सर्वाधिक सकेन्द्रण के बिन्दु का प्रतीक होता है । इसीलिए बहुलक को स्थिति संबंधी माध्य कहा जाता है ।

कैनी एवं कीपिंग के अनुसार "The value of variable which occurs most frequently in a distribution is called mode." अर्थात् बहुलक वह मूल्य है जो श्रेणी में सबसे अधिक बार आता है अर्थात् जिसकी आवृत्ति सर्वाधिक हो ।

जिजेक के शब्दों में, Mode is the value occuring most frequently in a series (or group) of items and around which the other items are distributed most densely. अर्थात् बहुलक वह मूल्य है जो पदों की श्रेणी (अथवा समूह) में सबसे अधिक बार आता है तथा जिसके चारों ओर सबसे अधिक घनत्व में पदों का वितरण रहता है ।

क्राक्सटन एवं काउडने के अनुसार, 'The mode of the distribution is the value at the point around which the items tend to be most heavily concentrated. It may be regarded as the most typical of a series of values. अर्थात् एक वितरण का बहुलक वह मूल्य है जिसके निकट श्रेणी की अधिक-से-अधिक इकाइयाँ केन्द्रित होती हैं । उसे श्रेणी का सर्वाधिक प्रतिरूपी या विशिष्ट (typical) मूल्य माना जा सकता है ।

प्रो० टुटले के शब्दों में, Mode is the value which has the greatest frequency in its immediate neighbourhood. अर्थात् बहुलक वह मूल्य है जिसके एकदम आस-पास आवृत्ति घनत्व अधिकतम होता है ।

ऊपर वर्णित परिभाषाओं से स्पष्ट है कि बहुलक किसी वितरण में उस स्थान व बिन्दु को सूचित करता है जहाँ आकृति का जमाव सर्वाधिक होता है । यह उस इकाई का मान होता है जिसकी बारम्बरता सबसे अधिक होती है । इन्हीं कारणों से बहुलक को स्थिति संबंधी माध्य भी कहा जाता है । इसे Z अथवा Mo लिखकर व्यक्त किया जाता है ।

अधिकांश व्यक्ति जब औसत अथवा माध्य के बारे में सोचते हैं तो उनके मस्तिष्क में शायद बहुलक की ही कल्पना होती है । जब हम औसत पारिवारिक आय, जूतों का औसत आकार, औसत आयु आदि कथनों का प्रयोग करते हैं तो इनका तात्पर्य सर्वाधिक प्रचलित अथवा बार-बार आने वाले पद मूल्य अर्थात् बहुलक से ही होता है । अत: धारणात्मक रूप से यह माध्य अधिक उपयोगी माना जाता है ।

बहुलक की गणना

(Computation of Mode)

1. व्यक्तिगत श्रेणी (Individual series)

व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक की गणना करना बहुत ही सरल है । इसे मात्र निरीक्षण द्वारा भी मालूम किया जा सकता है । सर्वप्रथम दिये गये समंकों को एक निश्चित क्रम में व्यवस्थित किया जाता है । तत्पश्चात् प्रत्येक समान मान वाले मूल्यों की गणना करके सर्वाधिक आवृत्ति वाले पद नाम को निर्धारिक कर लिया जाता है । इसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण 1- निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात करें :

7, 8, 9, 9, 7, 6, 9, 4, 10, 3, 5, 9, 9,

हल :

दिये गये समंकों को क्रमबद्ध करने पर-

3, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10

उपर्युक्त संख्याओं में 9 सबसे अधिक (5) बार आया है । अत: निरीक्षण मात्र से स्पष्ट है कि 9 ही इस श्रेणी का बहुलक मान है । अत: बहुलक = 9.

जब कभी व्यक्तिगत श्रेणी में दिये गये मूल्यों की संख्या बहुत अधिक हो तो बहुलक ज्ञात करने के लिए इसे खण्डित श्रेणी में बदल देना अधिक उपयुक्त होता है । इससे गणना क्रिया सरल हो जाती है तथा गलती की सम्भावना कम हो जाती है । इसे निम्न उदहारण से स्पष्ट किया जा सकता है ।

उदाहरण 2- नीचे दिये गये समंक पत्राचार पाठ संस्थान के 40 छात्रों के दैनिक व्यय से सम्बद्ध हैं । बहुलक व्यय ज्ञात कीजिये-

प्रति छात्र दैनिक व्यय (रूप में)

19	15	16	19	18	21	24	20	21	17
20	15	14	21	22	23	19	23	16	19
18	17	16	15	18	19	20	22	24	17
9	18	17	16	20	20	22	18	14	19

हल :

चूँकि श्रेणी का आकार बहुत बड़ा है । अत: बहुलक ज्ञान करने के लिए इसे खण्डित श्रेणी में बदलना उपर्युक्त है जो निम्न प्रकार है :

दैनिक व्यय (रु० में)	छात्रों की संख्या (f)
14	2
15	3
16	4

17	4
18	5
19	7
20	5
21	3
22	8
23	2
24	2

श्रेणी के निरीक्षण से स्पष्ट है कि अधिकतम आवृत्ति 7 है । अत: सम्बन्धित मूल्य 19 ही बहुलक है ।

अत: बहुलक दैनिक व्यय = 19 रुपये

जब व्यक्तिगत श्रेणी का कोई भी व्यक्तिगत मूल्य एक से अधिक बार नहीं आया हो तब बहुलक का मान ज्ञात करने के लिए उसे खण्डित श्रेणी में बदल देना चाहिए । अधिकतम आवृत्ति वाले वर्गान्तर को बहुलक वर्गान्तर मानते हुए उपर्युक्त सूत्र के सहयोग से बहुलक का मान ज्ञात करना चाहिए । इसकी गणना विधि की चर्चा हम आगे करेंगे ।

2. खण्डित श्रेणी (Discrete series)

खण्डित श्रेणी में बहुलक निर्धारण की दो रीतियाँ हैं- (अ) निरीक्षण रीति तथा समूहन रीति ।

(अ) निरीक्षण रीति (Inspection Method) – बहुलक निर्धारण की निरीक्षण रीति का प्रयोग केवल तभी करना चाहिए जब आवृत्ति वितरण निम्न शर्त पूरा करता हो-

(1) श्रेणी की आवृत्तियाँ नियमित (regular) हों अर्थात् पहले बढ़ें, फिर अधिकतम हों और उसके बाद लगभग उस गति से गिरती हुई हों ।

(2) श्रेणी में अधिकतम आवृत्ति केवल एक ही हो ।

(3) अधिकतम आवृत्ति श्रेणी के लगभग केन्द्र में हो ।

(4) अधिकतम आवृत्ति से पहले और बाद की आवृत्तियों के योग में अधिक अन्तर न हो ।

इस रीति में बहुलक की गणना विधि ठीक वैसी ही है जैसी व्यक्गित श्रेणी में । इसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है ।

उदाहरण 3- निम्न वितरण का बहुलक ज्ञात कीजिये-

Size :	10,	15,	20,	30,	35	40.
Freqnency :	20,	32,	40,	68,	50,	20.

हल : निरीक्षण द्वारा स्पष्ट है कि अधिकतम आवृत्ति 68 है । अत: इससे सम्बन्धित पदमान 25 ही इस श्रेणी में बहुलक है ।

अत: बहुलक 25.

(ब) समूहन रीति (Grouping Method) – समूहन रीति का प्रयोग उस दशा में किया जाता है जब समंक-माला की आवृत्तियाँ अनियमित हों अर्थात् आवृत्तियों के बढ़ने-घटने का कोई निश्चित क्रम नहीं हो । ऐसी स्थिति में अधिकतम आवृत्ति अर्थात् आवृत्तियों के अधिकतम जमाव के बिन्दु का ठीक-ठाक पता निरीक्षण मात्र से नहीं चल पाता । सामान्यत: आवृत्तियाँ निम्न दशाओं में अनियमित मानी जाती हैं-

(1) जब अधिकतम आवृत्ति दो या दो से अधिक स्थानों पर हो ।

(2) जब अधिकतम आवृत्ति श्रेणी के केन्द्र में न होकर श्रेणी के बिल्कुल आरम्भ अथवा अनन्त में हो ।

(3) जब आवृत्तियाँ कभी घटती हैं तो कभी बढ़ती हैं । कभी तेजी से बढ़ें तो कभी धीरे बढ़ें अथवा घटें ।

(4) अधिकतम आवृत्ति के दोनों ओर की आवृत्तियों के योग में अन्तर अधिक हो ।

(5) अधिकतम आवृत्ति के अलग-बगल की आवृत्तियाँ बहुत कम हों अथवा अधिकतम आवृत्ति के निकटतम आवृत्ति के अगल-बगल की आवृत्तियाँ अपेक्षाकृत बड़ी हों ।

इसे निम्न उदहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है :

Size :	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Freqnency :	2	5	8	9	12	14	14	15	11	13

हल:

यद्यपि निरीक्षण से यही लगता है कि 11 ही बहुलक है क्योंकि इसी की आवृत्ति (15) अधिकतम है । परन्तु यह निष्कर्ष गलत है क्योंकि यहाँ आवृत्तियों का वितरण अनियमित है, आवृत्तियों के बढ़ने-घटने का क्रम बेतरतीब है । अधिकतम आवृत्ति श्रेणी के मध्य में नहीं है । आवृत्तियों का जमाव श्रेणी के अन्तिम भाग में अधिक है । अत: यहाँ बहुलक का निर्धारण समूहन रीति द्वारा किया जायेगा ।

समूहन रीति द्वारा बहुलक का निर्धारण

frequency Size	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
4	2					
5	5	7				
6	8		13	15		
7	9	17	21		22	
8	12			30		29
9	14	26			(40)	
10	14		(28)			
11	(15)	(29)				
12	11		26	40	(43)	
13	13	24		39		

समूहन प्रक्रिया (Procedure of grouping)– ऊपर की सारणी से स्पष्ट है कि समूहन क्रिया के लिये एक सारणी बनाई जाती है जिसमें चर-मूल्यों के अलावा आवृत्तियों के प्रयोग के लिए 6 कॉलम होते हैं । समूहन क्रिया से केवल आवृत्तियों का ही प्रयोग किया जाता है, चर मूल्यों का नहीं । इसकी क्रिया-विधि इस प्रकार है -

प्रथम कॉलम में प्रश्न में दी हुई आवृत्तियाँ लिखी जाती हैं ।

दूसरे कॉलम में, प्रारम्भ से दो-दो आवृत्तियों को छोड़कर उनके योग सामने मध्य भाग में लिखे जाते हैं ।

जैसे 5+5=7,, 8+6= 14, 12+14=26 तथा इस प्रकार.....।

तीसरे कॉलम में, प्रथम आवृत्ति को छोड़कर दो-दो आवृत्तियों के योग सामने मध्य भाग में लिखे जाते हैं-

जैसे 5+8+=13, 9+12=21, 14+14=28 और इसी प्रकार .....।

चाथे कॉलम में, बिना कोई आवृत्ति को छोड़ अर्थात् प्रारम्भ से तीन-तीन आवृत्तियों का योग कर बीच वाली आवृत्ति के सामने लिखा जाता है ।

पाँचवें कॉलम में पहली आवृत्ति को छोड़कर तीन-तीन आवृत्तियों के योग लिखे जाते हैं-

जैसे - 5+8+9=22, 12+14+14=40 तथा 15+11+13=39

छठे कॉलम में, प्रारम्भ की दो आवृत्तियाँ छोड़कर तीन-तीन आवृत्तियों के योग लिखे जाते हैं ।

जैसे- 8+9+12=29 तथा 14+14+15=43

उपर्युक्त क्रिया के बाद प्रत्येक कॉलम की अधिकतम आवृत्ति को रेखांकित कर दिया जाता है । तत्पश्चात् एक विश्लेषण सारणी तैयार की जाती है जिसमें यह पता चलता है कि वास्तव में कौन-सा पद मूल्य-सर्वाधिक लोकप्रिय है । विश्लेषण सारणी में सबसे पहले, समूहन-सारणी के विभिन्न कॉलमों की संख्या क्रमानुसार लिख दी जाती है । विश्लेषण सारणी के क्षैतिज भाग में पद मूल्य लिखे जाते हैं । इसका स्वरूप निम्न प्रकार होता है :

विश्लेषण सारणी

Size columns.	4	5	7	8	9	10	11	12	13
(1)						1			
(2)					1	1			
(3)				1	1				
(4)					1	1	1		
(5)			1	1	1				
(6)				1	1	1			
Total	0	0	0	0	1	3	5	4	1	0

समूहन सारणी के प्रथम कॉलम के अनुसार 15 सर्वाधिक आवृत्ति है अत: इससे सम्बन्धित पद-मूल्य 11 ही बहुलक है । अत: विश्लेषण सारणी में प्रथम कॉलम के सामने और 11 के नीचे एक टैलीबार खींच देते हैं । समूहन सारणी के दूसरे कॉलम में अधिकतम आवृति 29 है जो 14 और 15 का योग है । अत: इस कॉलम के अनुसार 10 तथा 11 दोनों पद-मूल्यों को बहुलक माना जायेगा । और (2) कॉलम के सामने विश्लेषण सारणी में 10 तथा 11 के नीचे एक-एक टैलीबार खींच दिया जायेगा । इसी प्रकार तीसरे कॉलम जिसमें एक छोड़कर दो-दो आवृत्तियों का योग लिखा गया है 28 सबसे अधिक आवृत्ति है । यह 14 और 14 का योग है । अत: इनसे सम्बन्धित पदों अर्थात् 9 और 10 के नीचे एक-एक टैलीबार खींच दिया जायेगा । अब चौथे कॉलम को देखते हैं । इसमें तीन-तीन आवृत्तियों का योग लिखा गया है । इस कॉलम की अधिक आवृति 40 है । अत: विश्लेषण सारणी में चाथै कॉलम के मुताबिक 8,9 और 10 तीनों ही बहुलक हैं अत: विश्लेषण सारणी (5) कॉलम के सामने 8,9 तथा 10 के नीचे एक-एक टैलीबार खींच दिया जायेगा । छठे कॉलम के अनुसार 9,10 और 11 बहुलक हैं, अत: विश्लेषण सारणी में (6) कॉलम के सामने 9, 10 और 11 के नीचे एक-एक टैलीबार खींच दिया जायेगा । अब विश्लेषण सारणी के प्रत्येक कॉलम के टैलीबारों का योग किया जायेगा । विश्लेषण सारणी से स्पष्ट है कि पदमूल्य 10 के पास ही सबसे अधिक (5) टैलीबार है अत: यही सबसे लोकप्रिय पदमूल्य है ।

अत: बहुलक = 10

(3) सतत श्रेणी (Continuous series)

सतत् श्रेणी में बहुलक ज्ञात करने के लिए सबसे पहले, बहुलक वर्ग (Model class) का पता लगाया जाता है । यदि आवृत्तियाँ नियमित हैं तो निरीक्षण द्वारा और यदि आवृतियाँ अनियमित हैं तो पि[illegible] समूहन रीति द्वारा बहुलक वर्ग का निर्धारण किया जाता है । बहुलक वर्ग का निर्धारण करने के बाद निम्न सूत्र की सहायता से बहुलक का मूल्य निकाल लिया जाता है-

$$Z = l_2 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times 1$$

यहाँ

Z= बहुलक मूल्य,

l_1= बहुलक वर्ग की निम्न सीमा

f_1= बहुलक वर्ग की आवृत्ति

f_0= बहुलक वर्ग से तुरन्त पहले वाले वर्ग की आवृत्ति

f_2= बहुलक वर्ग के तुरन्त बाद वाले वर्ग की आवृत्ति

i= बहुलक वर्ग की विस्तार

बहुलक के उपर्यक्त सूत्र को निम्न प्रकार भी लिखा जा सकता है :

$$Z = l_1 \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_{2i}} \times i \quad Z = l_2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

यहाँ, $\Delta_1 = f_1 - f_0$, $\Delta_2 = f_1 - f_2$

l_1 तथा l_2 = बहुलक वर्ग की निम्न तथा उच्च सीमा ।

उदाहरण 5 - निम्न आवृत्ति विवरण का बहुलक निकालें-

Marks.	10–20,	20–30,	30–40,	40–50,	50–60,	60–70,	70–80
Freqency :	10	20	25	40	30	15	5

हल-

निरीक्षण से स्पष्ट है कि अधिकतम आवृत्ति 40 है । अत: इससे सम्बन्धित वर्ग 40-50 ही बहुलक वर्ग है ।

हम जानते हैं कि :-

$$Z = l_2 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

उपर्युक्त सूत्र में मान रखने पर-

$$Z = 40 + \frac{40 - 25}{2 \times 40 - 25 - 30} \times 10$$

$$= 40 + \frac{15}{80 - 55} \times 10$$

$$= 40 + \frac{15}{25}$$

$$= 40 + 6$$

$$= 46$$

∴ बहुलक अंक = 46

उदाहरण 6- Compute the mode from the following distribution.

Class :	0–10,	10–20,	20–30,	30–40,	40–50,	50–60,	60–70
Frequency :	5	7	19	18	16	10	5

हल- आवृति वितरण अनियमित होने के कारण यहाँ बहुलक वर्ग का निर्धारण समूहन रीति द्वारा किया जायेगा ।

समूहन रीति द्वारा बहुलक वर्ग का निर्धारण

	Frequeuncy					
Class	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
0–10	5					
		12		31		
10–20	7		26			
20–30	(19)					
		(37)				
30–40	18		(34)			
40–50	16				44	
		26		(44)		(53)
50–60	10					
			15		31	
60–70	5					

ऊपरी की सारणी वृत के अन्दर लिखे अंक प्रत्येक कॉलम में उच्चतम आवृति-घनत्व को व्यक्त कर रहे हैं । इसके सहारे विश्लेषण सारणी निम्न प्रकार तैयार की जायेगी ।

विश्लेषण सारणी

Column	Class	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
(i)				1				
(ii)				1	1			
(iii)					1	1		
(iv)					1	1	1	
(v)				1	1	1		
Total		0	1	4	5	3	1	0

विश्लेषण सारणी से स्पष्ट है कि 30-40 ही बहुलक वर्ग है क्योंकि इसी वर्ग में आवृति का जमाव अधिकतम है ।

यहाँ

$1_1 = 30$ $f_0 = 19$

$f_1 = 18$ $f_2 = 16$ तथा $i = 10$

इस प्रश्न में हम यह देख रहे हैं कि $f_1 < f_0$ अतः बहुलक की गणना के लिए यहाँ निम्नलिखित सूत्र का उपयोग किया जायेगा :

$$Z = l_1 + \frac{f_1}{f + f_2} \times i$$

अब उपयुक्त सूत्र में मान रखने पर-

$$Z = 30 + \frac{16}{19+16} \times 10$$

$$= 30 _ \frac{16}{35} \times 10$$

$$= 30 + \frac{16}{7} \times 2$$

$$= 30 + \frac{32}{7}$$

$$= 30 + 4.57$$

$$= 34.57$$

$\therefore$ Model Value = 34.57

कभी-कभी विश्लेषण सारणी द्वारा भी द्वारा भी बहुलक वर्ग का ठीक-ठीक पता नहीं चल पाता । ऐसा तब होता है जब विश्लेषण में एक से अधिक वर्गों के समान मात्रा में टैलीबार प्राप्त हो जाय । ऐसी स्थिति में उन सभी वर्गों की बारी-बारी से बहुलक वर्ग मानते हुए प्रत्येक वर्ग के अलग-अलग के वर्गों की आवृतियों का योग ($f_1+f_0+f_2$) किया जाता है । जिस वर्ग से सम्बन्धित योग सबसे अधिक होता है उसे ही सही बहुलक माना जाता है । इस रीति को घनत्व परीक्षण रीति कहा जाता है ।

यदि घनत्व परीक्षण में भी दो या अधिक वर्गों में समान आवृति-घनत्व आ जाय तो ऐसे वितरणों को द्वि-बहुलक अथवा बहु-बहुलक वितरण कहा जाता है । ऐसी स्थिति में माध्य के रूप में बहुलक का महत्व समाप्त हो जाता है । कभी-कभी तो ऐसा भी होता है कि वितरण के प्रत्येक पद की आवृत्ति समान रहती है । ऐसी दशा में वितरण बहुलक रहित माना जाता है ।

उदाहरण-निम्न वितरण से बहुलक का मान ज्ञात कीजिये-

Class :	0-10,	10-20,	20-30,	30-40,	40-50,	50-60,	60-70,	70-80
Frequency	22	38	54	75	72	64	31	10

हल- वितरण अनियमित है । अत: यहाँ बहुलक वर्ग पता करने के लिए समूहन रीति का उपयोग किया जायेगा ।

समूहन रीति से बहुलक की गणना

Class\Frequency	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
0–10	22	60				
10–20	38		92	114	(167)	
20-30	54	129				
30-40	(75)		147	(211)		(201)
40-50	75	136			(167)	
50-60	64		95			105
60-70	31	41				
70-80	10					

Column/Class	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70--80
(i)				1				
(ii)					1	1		
(iii)				1	1			
(iv)				1	1	1		
(v)		1	1	1	1	1	1	
			1	1	1			
Total	0	1	2	5	5	3	1	0

विश्लेषण सारणी से स्पष्ट है कि 30-40 तथा 40-50 दोनों वर्गों में आवृति का जमाव एवं सर्वाधिक है । इनमें से सही बहुलक वर्ग 'के चुनाव के लिए निम्न प्रक्रिया व्यवहार में लायी जाएगी-

माना कि बहुलक वर्ग 30-40 है :

तब:

f_0=54

f_1=75

f_2=72

कुल योग-201

माना कि बहुलक वर्ग 40-50 है :

तब:

f_0=75

f_1=72

f_2=54

कुल - 201

अत: 40-50 ही सही बहुलक वर्ग है क्योंकि इसमें आवृति का जमाव (201) अधिक है । यहां हम देख रहें है कि f_1 से f_0 का मान अधिक है अत: बहुलक के निम्न सूत्र का उपयोग किया जाएगा ।

$$Z = l_1 + \frac{f_1}{f_0 + f_2} \times i$$

$$= 40 + \frac{64}{75 + 64} \times 10$$

$$= 40 + \frac{64}{139} \times 10$$

$$= 40 + \frac{640}{139}$$

$$= 40 + 4.6$$

$$44.6$$

∴ बहुलक का मान = 44.6

सतत् श्रेणी में बहुलक की गणना बिन्दुरेखीय रीति से भी की जा सकती है किन्तु इसके लिए नियमित आवृति वितरण का होना आवश्यक होता है । इस रीति की विस्तृत चर्चा हमलोग पूर्व के पाठ 'समंकों के बिन्दुरेखीय दर्शन' के अन्तर्गत कर चुके हैं ।

बहुलक के गुण

(Merits of Mode)

बहुलक के निम्नलिखित गुण व लाभ हैं :

(1) सरलता (Simplicity)–बहुलक का सबसे बड़ा गुण इसकी सरलता है । यह माध्य समझने व गणना की दृष्टि से इतना अधिक सरल है कि इसका प्राय: निरीक्षण मात्र से ही पता चल जाता है ।

(2) बिन्दु-रेखीय रीति से निर्धारण-बहुलक का निर्धारण बिन्दु-रेखीय रीति द्वारा भी आसानी से किया जा सकता है ।

(3) चरम सीमओं का न्यूनतम प्रभाव-बहुलक पर श्रेणी से चरम मूल्यों का बहुत कम प्रभाव पड़ता है । बहुलक निर्धारण के लिए श्रेणी के सभी पदों की जानकारी अनिवार्य नहीं क्योंकि एक नियमित आवृति वितरण में बहुलक वर्ग और उसके बगल की आवृत्तियों को देखकर ही बहुलक का निर्धारण किया जा सकता है ।

(4) सर्वोत्तम प्रतिनिधित्व-बहुलक श्रेणी का सर्वाधिक लोकप्रिय मूल्य होता है । अत: वह सर्वोत्तम प्रतिनिधित्व करने वाला माध्य कहा जा सकता है ।

बहुलक के दोष

(Demerits of Mode)

बहुलक के निम्नलिखित दोष एवं कमियां हैं-

(1) अस्पष्ट तथा अनिश्चित-बहुलक का सबसे बड़ा दोष उसकी अस्पष्टता व अनिश्चितता है । जब श्रेणी के सभी पदों की आवृत्तियां समान होती हैं तो ऐसी स्थिति में बहुलक का निर्धारण नहीं किया जा सकता । कभी-कभी एक ही श्रेणी में दो या दो से अधिक बहुलक भी हो सकते हैं ।

(2) जटिलता- यदि निरीक्षण द्वारा बहुलक का पता नहीं चलता तो समूहन रीति का उपयोग किया जाता है । इस रीति में अपनायी जाने वाली प्रक्रिया जटिल होती है । सामान्य व्यक्ति उसे आसानी से समझ नहीं पाता ।

(3) चरम सीमाओं की अपेक्षा-बहुलक श्रेणी के चरम पदों को कोई महत्व नहीं देता जो कि गणितीय दृष्टि से उचित नहीं है ।

(4) बीजगणितीय विवेचना- श्रेणी के सभी पदों पर आधारित नहीं होने के कारण बहुलक की बीजगणितीय विवेचना सम्भव नहीं है । यही कारण है कि बहुलक का उपयोग अन्य सांख्यिकीय रीतियों में बहुत कम किया जाता है ।

बहुलक का उपयोग

(Use of Mode)

बहुलक चूँकि वितरण में अधिकतम संकेन्द्रन को व्यक्त करता है: यह विपणन, व्यापार, व्यवसाय व उद्योग में सर्वाधिक लोकप्रिय पद अथवा मान को बताता है, निर्णय लेने में सहायक होता है । व्यापार प्रबन्ध एवं मजबूती भुगतान को विभिन्न पद्धतियों के निर्धारण में बहुलक उपयोग किया जाता है । मौसम विभाग द्वारा भी बहुलक उपयोग किया जताा है । अत: व्यवसाय, व्यापार तथा जीव-शास्त्र सम्बन्धी समस्याओं का अध्ययन करने के लिए बहुलक एक उपयोग माध्य होता है ।

आदर्श प्रश्न

(Model Questions)

(1) बहुलक से आप क्या समझते हैं ? केन्द्रीय प्रवृति के एक माप के रूप में इसके गुण-दोषों का वर्णन कीजिए ।

(2) निम्न आँकड़ों से बहुलक आकार ज्ञात कीजिये ।

Size of shoes :

4, 5, 7, 9, 8, 7, 6, 5, 3, 2,

8, 9, 10, 7, 8, 7, 10, 5, 4, 3, 1,

8, 6, 5, 8, 7, 6, 3, 2, 7, 8, 4,

7, 8, 7, 7, 5, 3, 7, 6, 8, 7, 10

(3) बहुलक की गणना कीजिए

Class :	4–12	8–12	12–16,	16–20	20–21,	25–28,	28–32
f :	5	10	15	30	15	10	5

(4) निम्न वितरण का बहुलक निकालें-

पद:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	25	30	38	45	46	68	32	34	25	22

(5) Calculate mode income from the following,

Income (in Rs.) :	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90
Frequency :	6	14	16	18	4	6	3

(6) निम्न समंकों से बहुलक का मान ज्ञात करें-

मध्यमान :	10	20	30	40	50
	30	40	50	30	20

(7) Calculate mod from the following :

Size :	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
Frequency :	22	15	8	5	2

(8) निमन समंकों से बहुलक ज्ञात कीजिये-

प्राप्तांक :	80	70	60	50	40	30	20	10
विद्यार्थियों की संख्या :	100	90	80	60	32	20	13	5

(9) निम्न श्रेणी का बहुलक ज्ञात कजिएये

वर्ग :	40,	-50,	-60,	-70,	-80,	-90,	-100,	-110,
आवृति :	7	9	14	25	16	8	3	5

(10) केन्द्रीय प्रवृति से आप कया समझते हैं ? इसकी विभिन्न मापों के नाम बतावें तथा एक आदर्श माध्य के आवश्यक गुणों का वर्णन करें ।

●

पाठ - 11

मध्यका

(THE MEDIAN)

प्रिय छात्रो,

गत पाठ में हमलोग केन्द्रीय प्रवृति के एक माप बहुलक के संबंध में विस्तृत चर्चा कर चुके हैं । अब इस पाठ में हमलोग मध्यका मध्यका (Median) के विषय में चर्चा करेंगे ।

मध्यका को अंग्रेजी अक्षर M द्वारा दर्शाया जाता है । यह एक महत्वपूर्ण तथा लोकप्रिय माध्य है । मध्यका भी बहुलक की ही तरह स्थिति सम्बन्धी एक माध्य है । यह एक क्रमबद्ध समंक श्रेणी का केन्द्रीय या मध्य-मूल्य होता है । यह श्रेणी के दो बराबर भागों में विभाजित करती है । प्रो० कौनर के शब्दों में, "The median is that value of the variable which devides the group into two equal parts, one part comprising of the values greater than and the other of all values less than the median." अर्थात् मध्यका समंक श्रेणी का वह चर-मूल्य है जो समूह को दो बराबर भागों में इस प्रकार बाँटता है कि एक भाग के सभी मूल्य मध्यका से कम तथा दूसरे भाग

के सभी मूल्य मध्यका से अधिक हों । उदाहरणों के लिए, यदि 7 छात्रों की उम्र क्रमशः 12, 13, 15, 18, 19, 21, 23 वर्ष हों तो उनकी मध्यका उम्र 18 वर्ष होगी क्योंकि वह चौथे क्रम की संख्या श्रेणी के बिल्कुल मध्य में स्थित है । इससे पहले की तीनों संख्याएँ इससे कम हैं तथा बाद की तीनों ही संख्याएँ इससे बड़ी हैं । यह आवश्यक नहीं कि मध्यका मान श्रेणी में विद्यमान कोई संख्या ही हो। वह श्रेणी से बाहर की भी कोई संख्या हो सकती है । जब श्रेणी में पदों की संख्या विषम (odd) होती है तो मध्यका पद निर्णीत (determinable) होती है परन्तु यदि पदों की संख्या सम (even) होती है, तो मध्यका पद अनिर्णीत (Indeterminable) होती है । ऐसी स्थिति में मध्यका मूल्य श्रेणी में विद्यमान नहीं होता । वह निकटवर्ती दो मूल्यों के मध्य आन्तरगणन से ज्ञात किया जाता है । उदाहरण के लिए यदि 8 छात्रों की उम्र क्रमशः 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22, और 24 वर्ष हों तो मध्यका उम्र चौथे तथा पांचवे क्रम की संख्याओं का औसत् $(18+20) \div 2 = 19$ वर्ष होगी; जो श्रेणी में विद्यमान नहीं है ।

मध्यका की गणना

(Calculation of Median)

(1) व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series)– व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका ज्ञात करने के लिए निम्न प्रक्रियाएँ की जाती हैं ।

(1) श्रेणी को आरोही (ascending) अथवा अवरोही (descending) क्रम में अनुविन्यासित किया जाता है ।

(2) पदों को अनुविन्यासित करने के बाद निम्न सूत्र का प्रयोग करके मध्यका का मूल्य निर्धारित किया जाता है:

$$M = \text{values of } \frac{n+1}{2} \text{ th item.}$$

यहां M = मध्यका

n = श्रेणी में कुल पदों की संख्या

उदाहरण 1 - निम्न समंकों का मध्यका मूल्य ज्ञात करें -

X : 60, 40, 70, 30, 50, 80, 90, 45, 75, 35, 95, 78, 85.

हल:

चूँकि दिये गये समंक बेतरतीब रूप में हैं अतः उन्हें आरोही क्रम में अनुविन्यासित किया जायेगा ।

Sl. No	X	
1	30	
2	35	
3	40	
4	45	
5	50	यहाँ n = 13
6	60	
7	70	
8	75	
9	78	
10	80	
11	85	
12	90	
13	93	

$$\text{Median} = \text{Value of } \frac{n+1}{2} \text{ th item}$$

$$= \text{Value of } \frac{13+1}{2} \text{ th item}$$

$$= \text{Value of 7th item}$$

$$= 70$$

$\therefore$ Median Wage = Rs. 70

यदि श्रेणी में पदों की संख्या सम (even) जैसे 2,4,6,8,10 आदि होती है तो मध्यका मध्य के दो पदों के मूल्यों के माध्य के बराबर माना जाता है । उदाहरण के लिए, यदि पदों की संख्या 12 हो तो मध्यका इकाई=12+1/2 अर्थात् 5 वाँ, अगर श्रेणी के कुल पदों की संख्या 18 हो तो मध्यका इकाई = 18+41/2 अर्थात् 9.5 वाँ होगा । इन्हीं की मदद से मध्यका मूल्य निर्धारित किया जायेगा जो इन इकाइयों के दोनों ओर की संख्याओं को जोड़कर उसमें 2 से भाग देने पर प्राप्त होगा ।

निम्न उदाहरण के द्वारा इसे स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण - 2 किसी विद्यालय के 12 छात्रों द्वारा किसी विषय में प्राप्त अंक निम्न प्रकार हैं :

प्राप्तांक : 50 60 70 90 75 85 66 68

मध्यका प्राप्तांक ज्ञात करें ।

हल: सर्वप्रथम प्राप्तांक ज्ञात करें ।

हल: सर्वप्रथम प्राप्तांकों को आरोही क्रम में व्यवस्थित किया जायेगा ।

पद संख्या	प्राप्तांक	
1	40	
2	50	
3	60	
4	60	
5	66	
6	68	
7	70	
8	70	
9	75	यहाँ n = 12
10	80	
11	85	
12	90	

$$\text{Median} = \text{Value of } \frac{n+1}{2} \text{ th them}$$

$$= \text{Value of } \frac{12+1}{2} \text{ th item}$$

$$= \text{Value of } 6.5\text{th item.}$$

$$= \frac{\text{value of 6th item} + \text{Value of 7th item}}{2}$$

$$= \frac{68 + 70}{2}$$

$$= \frac{138}{2} = 69$$

∴ मध्यका प्राप्तांक = 69.

(II) खण्डित श्रेणी (Discrete series)– खण्डित श्रेणी से मध्यका मूल्य ज्ञात करने के लिए उसी सूत्र का व्यवहार किया जाता है जिसका उपयोग व्यक्तिगत श्रेणी में होता है किन्तु इस श्रेणी में निम्नलिखित प्रक्रियाओं का पालन करना आवश्यक होता है-

(ii) संचयी आवृत्ति का पता निम्नलिखित सूत्र से किया जाता है ।

मध्यका इकाई $= \frac{n + 1}{2}$

(iii) मध्यका इकाई ज्ञात हो जाने के पश्चात् संचयी आवृति कॉलम देखा जाता है कि मध्यका इकाई किस संचयी आवृति में शामिल है । उसके सामने का पदमान मध्यका का मूल्य होता है ।

उदाहरण 3- निम्न बंटन का मध्यका ज्ञात कीजिये-

x :	60	62	63	65	68	70	72	80	85
r :	10	15	20	5	8	40	13	2	10

मध्यका की गणना

x	f	c.f
60	10	10
62	15	25
63	20	45
65	5	50
68	8	58
70	40	98
72	13	111
80	2	113
85	10	123

मध्यका इकाई

$$= \frac{n + 1}{2} \text{ th item}$$

= 62 वीं इकाई ।

संचयी आवृति कॉलम (c.f.) में देखने पर हम पाते हैं कि मध्यका इकाई (62) संचयी आवृति 98 में शामिल है । अत: इसके सामने का मूल्य 70 ही मध्यका मूल्य है ।

अत: मध्यका मान = 70.

(3) सतत श्रेणी (Continuous series) - सतत श्रेणी में मध्यका ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित प्रक्रियाओं का पालन किया जाता है-

(1) संचयी आवृत्ति का कॉलम तैयार किया जाता है ।

(2) मध्यका इकाई n_2 को शामिल करने वालं संचयी आवृति के वर्ग को निर्धारित किया जाता है । यही मध्यका वर्ग (median class) होता है ।

(3) अन्त में निम्न सूत्र का उपयोग कर मध्यका मान ज्ञात किया जाता है ।

$$M=1_1 + \frac{1_2-1_1}{f}(m-c)$$

$$M = 1_1 + \left[\frac{\frac{n}{2} - c}{\int}\right]$$

वहाँ

M = मध्यका मान, 1_1 मध्यका वर्ग की निम्न सीमा, 1_2 मध्यका वर्ग की उच्च सीमा, f= मध्यका वर्ग की सामान्य आवृति, m = मध्यका इकाई $=n_2$,c= मध्यका वर्ग के पहले वाले वर्ग की संचयी आवृति तथा i = मध्यका वर्ग का विस्तार, n= टोटल बारम्बरता ।

उदाहरण 4- निम्न बंटन का मध्यका ज्ञात कीजिये-

Class :	10–20,	20–30,	30–40,	40–50,	50–60
	10	20	40	20	10

मध्यका निर्धारण

Class	Frequency (f)	c.f
10–20	10	10
20–30	20	30
30–40	40	70
40–50	20	90
50–60	20	100

मध्यका इकाई (m) $\frac{n}{2}$th item

$$= \frac{100}{2} \text{ th item} = 50\text{th item}$$

संचयी आवृति 70 में मध्यका इकाई (50) भी शामिल है अत: इससे सम्बन्धित वर्ग 30-40 ही मध्यका वर्ग है

अत: यहाँ $l_1 = 30$, $l_2=40$, f=40 है तथा c=30 इन मूल्यों को उपयुक्त सूत्र में रखने पर :

$$M = l_2 + \frac{l_2 - l_1}{f} (m - c)$$

$$= 30 + \frac{40 - 30}{40}(50 - 30)$$

$$= 30 + \frac{10}{40} \times 20$$

$$= 30 + 5 = 35$$

$$\therefore \text{ Median } = 35$$

मध्यका वर्ग की उच्च सीमा का उपयोग करके भी मध्यका ज्ञात किया जा सकता है । इस स्थिति में निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है ।

$$M = l_2 - \frac{l_2 - l_1}{f} \times (c = m)$$

M= यहाँ मध्यका मूल्य, l_2 =मध्यका वर्ग की उच्च सीमा, l_1 मध्यका वर्ग की निम्न सीमा, f= मध्यमा वर्ग की सामान्य आवृति, m = इकाई अथवा n_2 तथा o= मध्यका वर्ग की संख्या आवृति ।

उदाहरण 5– उच्च सीमा का उपयोग करते हुए निम्न बंटन का मध्यका ज्ञात कीजिये-

Class :	0–11,	10–20,	20–30,	30–40,	40–50
Frequency	5	10	20	10	5

हल:

मध्यका निर्धारण

Class	f	c.f,
0–10	5	5
10–20	10	15
20–30	20	35
30–40	10	45
40–45	5	50

मध्यका इकाई (m)

$$= \frac{n}{2} \text{ th item.}$$

$$= \frac{50}{2} \text{ or 25th item.}$$

वह मध्यका इकाई संचयी आवृत्ति 35 में शामिल है अत: इससे संबंधित वर्ग 20-30 ही मध्यका वर्ग है ।

यहाँ

1_1=20, 1_2=30, f=20, c=35 तथा m=25 है ।

$$M = 1_2 - \frac{1_2 - 1_1}{f}(c - m)$$

$$= 30 - \frac{30 - 20}{20}(35 - 25)$$

30-5=25.

∴ मध्य का मूल्य 25.

कभी-कभी सतत् श्रेणी वर्ग अन्तराल के रूप में नहीं लिखकर मध्यबिन्दु के रूप में लिखी हुई होती है । ऐसी स्थिति में बहुलक अथवा मध्यका मान ज्ञात करने के लिये दिये गये मध्यबिन्दुओं से सम्बन्धित वर्ग की दोनों सीमाओं को निर्धारित किया जाता है । इसके लिए निम्नलिखित सूत्र का उपयोग किया जाता है :

$$1_1 = M.V - \frac{i}{2}$$

$$1_2 = M.V + \frac{i}{2}$$

1_1= निम्न सीमा

1_2= उच्च सीमा

M.V. = मध्य बिन्दु

i = दो मध्य बिन्दुओं के बीच का अन्तर

निम्न उदाहरण से वस्तु स्थिति पूर्णत: स्पष्ट की जा सकती है:

$\frac{1_2 - 1_1}{f}(m - c)$ उदाहरण 6- निम्न समंकों से मध्यका ज्ञात करें-

Mid. Values :	20	30	40	50	60
Freqeuncy :	10	20	30	20	10

हल:

यहाँ श्रेणी पदों की मध्य बिन्दुओं के रूप में किया गया है अत: सर्वप्रथम इन्हें वर्ग अन्तराल में बदला जायेगा । प्रत्येक दो मध्य बिन्दुओं के बीच अन्तर 10 है । इसी अन्तर का आधा करके प्रत्येक मध्य बिन्दु में से घटाकर संबंधित वर्ग की निम्न सीमा तथा जोड़कर सम्बन्धित की उच्च सीमा प्राप्त कर ली जायेगी ।

Mid value.	Class	Frequency	Cumulative frequency
20	15-25	10	10
30	25-35	20	30
40	35-45	30	60
50	45-55	20	80
60	55-65	10	90

Size of Median (m) = $\frac{n}{2}$th item.

$= \frac{90}{2}$th item.

= 45वीं इकाई ।

यह मध्यका इकाई संचयी आवृत्ति 60 में शामिल है अत: इससे सम्बन्धित वर्ग 35-45 ही मध्यमा वर्ग है ।

$$M = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}(m - c)$$

यहाँ

l_1=35, l_2=45, f=30, m=45 तथा c=30 ।

सूत्र के उपर्युक्त मानों को रखने पर

$$M = 35 + \frac{45 - 35}{30}(45 - 30)$$

$$= 35 + \frac{10}{30} \times 15$$

= 35 + 5

= 40

मध्यका मान = 40

असमान वर्गान्तरों से मध्यका का निर्धारण

मध्यका निर्धारण के लिए हमलोग अब तक जिस सूत्र का उपयोग करते आ रहे हैं उस सूत्र की मान्यता यह है कि दिये गये सभी वर्गों का समान विस्तार होगा किन्तु कभी-कभी प्रश्न में दिये गये वर्गों का विस्तार असमान होता है । ऐसी स्थिति में मध्यका निर्धारण के लिए सामान्य सूत्र का ही उपयोग किया जायेगा तथा जब तक प्रश्न में कहा न हो, तब तक असमान वर्ग के अन्तरालों को समान बनाने के लिए न तो वर्ग अन्तरालों को खण्डों में विभाजित करेंगे और न एक से अधिक वर्ग अन्तरालों को एक साथ मिलायेंगे । निम्न उदाहरण से इसे स्पष्ट किया जा सकता है ।

उदाहरण 7- Amend the following table and locate the median from the amended table.

Class Interval	Frequency
10–15	10
15–17.7	15
17.5–20	17
22–30	25
30–35	28
35–40	30
45 and above	40

हल :

चूँकि दिये गये अन्तराल असमान है किन्तु प्रश्न में उन्हें समान बनाने को कहा गया है, हम आवश्यकता के अनुसार दो या अधिक तथा उनकी आवृत्तियों को मिलाकर वर्ग अन्तरालों को समान बना लेंगे ।

Class interval	Frequency	Amended, Class interval	Amended, Frequency	Cumulative Frenquency
10–15	10			
15-17.5	15	10–20	42	42
17.5-20	17			
22-30	25	20-30	25	67
30-35	28			
35-40	30	30-40	58	125
45 and above	40	40 & above	40	165

मध्यका इकाई $(m) = \frac{n}{2}$

$$= \frac{165}{2}$$

अथवा 82.5 वीं इकाई । यह इकाई संचयी आवृति 125 में शामिल है । अतः इससे सम्बन्धित 30-40 ही मध्यका वर्ग है ।

$$M = l_1 + \frac{l_2 + l_1}{f}(m - c)$$

$$= 30 + \frac{40 - 30}{58}(82.5 - 67)$$

$$= 30 + \frac{10}{55} \times 15.5$$

$$= 30 + \frac{155}{55} = 30 + 2.67 = 32.67$$

∴ मध्य का मान = 32.67

समावेशी सतत श्रेणी से मध्यका का निर्धारण

समावेशी सतत श्रेणी से मध्यका अथवा बहुलक का मान ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम उसे अपवर्जी (Exclusive) सतत श्रेणी में बदला जाता है । तत्पश्चात उपर्युक्त सूत्र की सहायता से सम्बन्धित मान ज्ञात किया जाता है ।

समावेशी से अपवर्जी बनाने के लिए दी गयी श्रेणी में किन्हीं दो लगातार वर्गो में से प्रथम की उच्च सीमा तथा दूसरे की निम्न सीमा के बीच का अन्तर पता किया जाता है । इस अन्तर को आधा कर उसे दी गयी समावेशी श्रेणी की प्रत्येक निम्न सीमा में से घटा देते हैं तथा प्रत्येक उच्च सीमा से जोड़ देते हैं । ऐसा करने से दी गयी श्रेणी अपवर्जी श्रेणी में बदल जाती है । आवृत्तियों में किसी तरह का परिवर्तन नहीं किया जाता है ।

उदाहरण 8- भारत के किसी नगर के पुरुषों की उम्र से सम्बन्धित समंक निम्न प्रकार हैं-

Age Groups	**No. of Males**
0–9	50
10–19	70
20–29	30
30–39	60
40–49	40
50–59	20
60–69	10

मध्यका उम्र ज्ञात करें

<u>हल:</u>

प्रश्न में दिये गये वर्ग अन्तराल समावेशी रूप में हैं । इन्हें अपवर्जी बनाने के लिए किसी भी दो वर्गो में से प्रथम का l_2 तथा दूसरे के l_1 का मध्यका अन्तर देखा जायेगा । यह अन्तर यहाँ एक है । इसका आधार .5 हुआ । इसी 5 को दी गयी समावेशी श्रेणी के प्रत्येक l_1 में से घटाया जायेगा तथा प्रत्येक l_2 में जोड़ा जायेगा । ऐसा करने से समावेश श्रेणी अपवर्जी श्रेणी में निम्न प्रकार बदल जायेगी :

Age gropus	Amended age groups	Frequency	Cumulative Frequency
0–9	–5–9.5	50	50
10–19	9.5–19.5	70	120
20–29	19.5–29.5	30	150
30–39	29.5–39.5	60	210
40–49	39.5–49.5	40	250
50–59	49.5–59.5	20	270
60–69	59.5–69.5	10	280

मध्यका इकाई $(m) = \frac{n}{2}$

$= \frac{280}{2}$

$= 140$

मध्यका इकाई संचयी आवृत्ति 150 में शामिल है अत: 19.5 - 29.5 ही मध्यका वर्ग है ।

$$M = l_2 + \frac{l_2 - l_1}{f}(m - c)$$

$$= 19.5 + \frac{29.5 - 19.5}{30}(140 - 120)$$

$$= 19.5 + \frac{10}{30} \times 20$$

$$= 19.5 + 6.67 = 26.17$$

∴ मध्यका उम्र =26.17 वर्ष

संचयी आवृति वितरण से मध्यका का निर्धारण

जब प्रश्न में दी गयी श्रेणी संचयी आवृति के रूप में हो तब प्रश्न हल करने के पूर्व ऐसे वितरण को सामान्य विनरण में बदल लेना चाहिए । इसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है-

उदाहरण 9- निम्न बंटन से मध्यका ज्ञात करें :

Marks less than :	No. of Students.	Normal Class	Normal Frequency	Cumulative freeqncy
10	5	0–10	5	5
20	13	10–20	8	13
30	20	20–30	7	20
40	32	30–40	12	32
50	60	40–50	28	60
60	80	50–60	20	80
70	90	60–70	10	90
80	100	70–80	10	100

मध्यका इकाई (m) = $= \frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$

यह मध्यका इकाई संचयी आवृति 60 में शामिल है अत: 40-50 ही मध्यका वर्ग है ।

$$M = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}(m - c)$$

$$= 40 + \frac{50 - 40}{28}(50 - 32)$$

$$= 40 + \frac{10}{28} \times 18$$

$$= 40 + 6.63 = 46.63$$

∴ मध्यका प्राप्तांक = 46.43

उदाहरण 10- निम्न समंकों से मध्यका ज्ञात कीजिये ।

Wages above (Rs) :	30,	40,	50,	60,	70,	80,	90,
Workers :	520,	470,	399,	210,	104,	45,	7

हल:

प्रश्न हल करने के लिए दिये गये संचयी आवृत्ति वितरण (More than type cumulative frequency distribution) को सामान्य आवृत्ति वितरण में बदला जायेगा । तत्पश्चात् सामान्य सूत्र का उपयोग करके मध्यका मान निर्धारित किया जायेगा ।

Calculation of Median.

Wages above Rs	No. of Workers	Wage group	No. of Workers (f)	Cumulative Frequency (c.f)
30	520	30–40	50	50
40	470	40–50	71	121
50	399	50–60	189	310
60	210	60–70	106	416
70	104	70–80	59	475
80	45	80–90	38	513
90	7	90–100	7	520

मध्यका इकाई $(m) = \frac{n}{2}$

$$= \frac{520}{2}$$

$$= 260$$

जो संचयी आकृति 3.10 में शामिल है । अत: इससे संबंधित 5.-60 ही मध्यका वर्ग है ।

$$M = 1_1 + \frac{i_2 - i_1}{f}(m - c)$$

$$= 50 + \frac{60 - 50}{189}(260 - 121)$$

$$= 50 + \frac{10}{189} \times 139$$

$$= 50 + \frac{1390}{189}$$

= 50 + 7.36

= 57.36.

∴ मध्यका मजदूरी = 57.36 रु० ।

मध्यका का निर्धारण बिन्दुरेखीय रीति से भी किया जा सकता है । इसकी चर्चा हमलोग "बांटनों के बिन्दुरेखीय प्रदार्शन" शीर्षक पाठ में करेंगे ।

मध्यका का गुण

(Merits of Median)

मध्यका के गुण निम्नलिखित हैं :

(1) सरलता- इस मध्य को समझना एवं इसकी गणना करना बहुल सरल है । यही सामान्य व्यक्ति को भी बहुत आसानी से समझ में आ जाता है । कुछ परिस्थितियों में तो मध्यका समंक श्रेणी को देखकर ही ज्ञात की जा सकती है ।

(2) चरम सीमाओं का न्यूनतम प्रभाव-मध्यका का स्थिति संबंधी माध्य है । इस पर श्रेणी के चरम मूल्यों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता । इसके निर्धारण के लिए श्रेणी के सीमांत पदों की जानकारी अनिवार्य नहीं होती । अत: यह माध्य विषम बंटनों के अध्ययन के लिए अधिक उपयोग सिद्ध होता है ।

(3) बिन्दुरेखीय रीति द्वारा निर्धारण- मध्यका का निर्धारण बिन्दु-रेखीय रीति द्वारा भी किया जा सकता है ।

(4) स्पष्टता एवं निश्चितता - मध्यका बहुलक की तरह अनिश्चित माध्य नहीं हैं । इसका निर्धारण खुले सिरे वाले वर्गान्तर, असमान वाले वितरण आदि सभी प्रकार की श्रेणियों में निश्चितता के साथ किया जा सकता है ।

मध्यका के दोष

(Demerits of Median)

मध्यका के निम्नलिखित दोष हैं :

(1) बीजगणितीय विवेचन असम्भव-मध्यका का एक प्रमुख दोष यह है कि मध्यका का गणितीय विवेचन नहीं किया जा सकता। वास्तव में इस बीजगणितीय गुण के अभाव के कारण ही इसका उच्चतर सांख्यिकीय रीतियों में प्रयोग नहीं हो पाता ।

(2) निर्धारण में कठिनाई- मध्यका निर्धारण के लिए पदों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में विन्यासित करना पड़ता है । पदों की संख्या सम (even) होने पर मध्यका का वास्तविक मूल्य पता नहीं चल पाता । ऐसी स्थिति में केवल संभावित मूल्य से ही संतोष करना पड़ता है । सतत श्रेणी में मध्यका-निर्धारण की यह मान्यता है कि मध्यका वर्ग में आवृत्तियों का वितरण समान रूप से हुआ हो जबकि ऐसा सदैव देखने में नहीं आता ।

(3) चरम पदों की अवहेलना-जब कभी चरम पदों को महत्व देना आवश्यक हो, वहाँ यह माध्य अनुपयुक्त सिद्ध होता है ।

(4) अस्पष्टता- जब श्रेणी के पद-मूल्यों में काफी अन्तर हो या फिर आवृतियाँ अनियमित हों, वहाँ मध्यका केन्द्रीय प्रवृत्ति का सही प्रतिनिधित्व नहीं कर पाता ।

मध्यका का उपयोग (Uses of Median)–जहाँ तथ्यों की व्यक्तिगत रूप से अलग-अलग तुलना नहीं की जा सकती अथवा जिन्हें समूहों में रखा जाना आवश्यक है उनके तुलनात्मक अध्ययन के लिए एक मध्यका का प्रयोग बहुत उपयोगी है । इसके द्वारा ऐसी समस्याओं का भी अध्ययन हो सकता है जिन्हें परिमाण में व्यक्त नहीं किया जा सकता है-स्वास्थ्य, ज्ञान, सुन्दरता आदि । मध्यका का उपयोग सामाजिक समस्याओं के अध्ययन में विशेष रूप से होता है । संपत्ति का वितरण, श्रमिकों की मजदूरी, व्यक्तियों की योग्यता आदि की तुलना मध्यका द्वारा की जाती है । जहाँ अति-सीमान्त पदों को महत्व नहीं दिया जाता हो, वहाँ मध्यका अधिक उपयुक्त होती है ।

आदर्श प्रश्न

(Model Questions)

1. निम्न समंकों से मध्यका उत्पादन ज्ञात कीजिये-

   Production (in tonnes) : 100 120 140 126 140 180

2. पत्राचार पाठ संस्थान के 12 छात्रों द्वारा अर्थशास्त्र विषय में प्राप्त अंक निम्न प्रकार हैं-

   Marks : 50 60 40 45 65 80 90 95 55 60 62 75,

   मध्यका प्राप्तांक ज्ञात कीजिये ।

3. Calculate median from the following-

x :	15	20	25	30	35	60	80
f:	6	12	11	5	6	4	20

4. निम्नलिखित वितरण का मध्यका बतावें-

Mid Values :	20	30	40	50	60	70
Frequency :	10	20	30	40	50	5

5. मध्यका निकालें-

Class :	10–20,	20–30,	30–40	40–50,	50–60,
f :	5	40	20	10	5

6. निम्न बंटन का मध्यका ज्ञात करें-

Variate less than :	10	20	30	40	50	60	70
	8	20	30	50	78	95	100

7. Calculate median from the following :

Class	Frenquency
10–24	10
25–39	36
40–54	62
55–69	72
70–84	20

8. मध्यका लाभ ज्ञात करें -

अर्जित लाभ प्रतिशत में	उपक्रमों की संख्या
70% प्रतिशत से अधिक	7
60%	18
50%	40
40%	40
30%	63
20%	65

9. निम्न आवृत्ति वितरण से मध्यका मान निर्धारित कीजिये-

Class	Frenquency
20–40	6
40–60	9
60–80	11
80–100	14
100–120	20
120–140	15
140–160	10
160–180	8
180–200	7

10. मध्यका से आप क्या समझते हैं ? केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक माप के रूप में मध्यका के गुण-दोषों का वर्णन कीजिये ।

●

पाठ - 12

प्रिय छात्रो,

गत पाठ में हमलोगों ने मध्यका के विषय में विस्तृत चर्चा की । अब इस पाठ में हमलोग चतुर्थक, दशमक तथा शतमक के विषय में चर्चा करेंगे ।

हम जानते हैं कि मध्यका एक समंक-श्रेणी को दो बराबर भागों में बाँटती है । मध्यका के सिद्धान्त पर ही श्रेणी को अधिक भागों में विभाजित किया जा सकता है जैसे-चार, पाँच, सात, आठ, दस तथा सौ भागों में । जब एक श्रेणी चार बराबर भागों में बाँटी जाती है तब इन विभाजक मूल्यों को चतुर्थक (Quartiles) कहते हैं । श्रेणी को पाँच, सात, आठ, दस तथा सौ भागों में बाँटने वाले मूल्यों को क्रमशः पंचमक, सप्तमक, अष्टमक, दशमक तथा शतमक कहते हैं । विभाजन मूल्यों को एक तालिका के रूप में निम्न प्रकार दिखाया जा सकता है :

विभाजन मूल्य

विभाजक मूल्य	विभागों की संख्या	विभाजक मूल्यों की संख्या	विभाजक मूल्यों के लिए प्रयोग किये जाने वाले चिह्न
1. मध्यका (Median)	2	1	M
2. चतुर्थक (Quartiles)	4	3	$Q_1 Q_2 Q_3$
3. पंचमक (Quintile)	5	4	Qu_1 to Qu_4
4. सप्तमक (Septile)	7	6	SaP_1 to Sep_6
5. अष्टमक (Octile)	8	7	0_1 to O_7
6. दशमक (Decline)	10	9	D_1 to D_9
7. शतमक (Percentile)	100	99	$P_1 P_{99}$

अब हमलोग चतुर्थक, दशमक तथा शतमक के विषय में क्रमशः चर्चा करेंगे ।

चतुर्थक

(Quartiles)

चतुर्थक समंक-माला को चार बराबर भागों में बाँटता है । एक श्रेणी में चतुर्थक के तीन ही मूल्य होते हैं जिन्हें क्रमशः प्रथम चतुर्थक (Q_1) द्वितीय या मध्य चतुर्थक (Q_2) तथा तृतीय चतुर्थक (Q_3) कहा जाता है । प्रथम तथा तृतीय चतुर्थक को क्रमशः निम्न एवं उच्च चतुर्थक भी कहा जाता है । किसी भी श्रेणी में मध्य व द्वितीय चतुर्थक उक्त श्रेणी की मध्यका को ही कहा जाता है । अतः वास्तव में प्रथम एवं तृतीय चतुर्थक के मानों को ही सामान्यतः निर्धारित किया जाता है ।

चतुर्थक मूल्यों का निर्धारण - विभिन्न चतुर्थकों के मूल्यों के निर्धारण की विधि मध्यका की विधि के ही समान है ।

व्यक्तिगत श्रेणी में चतुर्थक के विभिन्न मूल्यों को ज्ञात करने के लिए (n+1) को 4 से भाग दिया जाता है । भागफल को वांछित चतुर्थक की संख्या से गुणा कर दिया जाता है ।

यहाँ n= श्रेणी में स्थित इकाइयों की कुल संख्या ।

$$Q_1 = \text{Value of } \frac{n+1}{4} \text{th unit.}$$

$$Q_2 = \text{Value of } 2\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{th unit.}$$

$$Q_3 = \text{Value of } 3\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{th unit.}$$

निम्नलिखित उदाहरण से वस्तुस्थिति पूर्णतः स्पष्ट की जा सकती है ।

उदाहरण 1- किसी महाविद्यालय के 11 छात्रों द्वारा अर्थशास्त्र में प्राप्त अंक निम्न प्रकार हैं:

उदाहरण 1- किसी महाविद्यालय के 11 छात्रों द्वारा अर्थशास्त्र में प्राप्त अंक निम्न प्रकार हैं :

प्राप्तांक : 60 50 40 30 70 55 67 80 75 65 तथा 85.

प्रश्न हल करने के लिए दिये गये बेतरतीब अंकों को अनुविन्यासित किया जायेगा । तत्पश्चात उपयुक्त सूत्र की मदद से वांछित माप ज्ञात किये जायेंगे ।

पद क्रम	प्राप्तांक
1	30
2	40
3	50
4	55
5	60
6	65
7	67
8	70
9	75
10	80
11	85

यहाँ n=11

$$Q_3 = \text{Value of } 3\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } \frac{11+1}{4} \text{th unit.}$$

= Value of 3rd unirt.

श्रेणी में तीसरी इकाई का मूल्य 50 है । अत: प्रथम चतुर्थक = 50

$$Q_2 = \text{Value of } 2\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } 2\left(\frac{12}{4}\right) \text{th unit.}$$

= Value of 6th unit. श्रेणी में 6 वीं इकाई का मान 65 है । अत: द्वितीय चतुर्थक = 65.

$$Q_3 = \text{Value of } 3\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } 3\left(\frac{12}{4}\right) \text{th unit.}$$

=Value of 9th unit. श्रेणी में 9वीं इकाई का मान 75 है । अत: तृतीय चतुर्थक = 75:

अत: Q_1=50, Q_2= 65 तथा Q3 = 75.

उदाहरण 2- निम्न समंकों से प्रथम तथा तीसरे चतुर्थक मानों को ज्ञात करें ।

Size : 10, 12, 15, 20, 25, 35, 45, 50, 60

हल:

पद क्रमांक (Sl. No.)	पदमान (Size)
1	10
2	12
3	20
4	20
5	25
6	35
7	45
8	50
9	60

Q_1 (First quartile) = Value of $\frac{n+1}{4}$ th unit.

= Value of $\frac{9+1}{4}$ th unit.

= Value of 2.5 the unit. श्रेणी में देखने पर 2.5 वीं इकाई व उसका मान कुछ भी उपलब्ध नहीं है । ऐसी परिस्थिति में वांछित मान निम्न सूत्र द्वारा प्राप्त किया जाता है ।

Q1=Value of 2nd unit + $\frac{1}{2}$ (Diff, between Values of third and second units.)

$= 12+\frac{1}{2}(15-12) = 12+\frac{3}{2} = 13.5$

$\therefore$ Q_1 = 13.5.

Q3=Value of $3\left(\frac{n+1}{4)}\right)$ th unit.

$= \text{Value of } 3\left(\frac{10}{4}\right)$ th unit.

=Value of (3×2.5) th unit.

= Value of 7.5 th unit. चूँकि यह इकाई श्रेणी में उपलब्ध ही नहीं है ।

अत:

Q3= Value of 7th unit + $\frac{1}{2}$ Diff. between values of 7th and 8th units.)

$$= 45 + \frac{1}{2}(50 - 45)$$

$$= 45 + \frac{5}{2}45 + 2.5 = 47.5$$

$\therefore$ Q_3=47.5

खण्डित श्रेणी में भी चतुर्थक ज्ञात करने का सूत्र वही है जो व्यक्गित श्रेणी में उपयोग किया जाता है । खण्डित श्रेणी में संचयी तैयार कर चतुर्थक इकाई को संचयी आवृति में देखते हैं । फिर उससे संबंधित मान ही वांछित चतुर्थक का मान कहलाता है । इसे निम्न उदाहरण से स्पष्ट किया जा सकता है-

उदाहरण 3- निम्न समंकों से प्रथम और तृतीय चतुर्थक का मान ज्ञात कीजिये:

Marks :	20	30	40	50	60
No. of Students :	4	16	20	18	11

हल:

खण्डित श्रेणी में चतुर्थक निर्धारण

Marks	No. of Students (f)	Cumulative Frequency(c.f)
20	4	4
30	16	20
40	20	40
50	18	58
60	11	69

Q_1=Value of $\frac{n+1}{4}$th unit.

=Value of $= \frac{69+1}{4}$th unit.

=Value of 17.5 th unit.

संचयी आवृत्ति कॉलम देखने से स्पष्ट है कि 17.5 की इकाई संचयी आवृति 20 में शामिल है । अत: इसके सामने लिखा प्राप्तांक 30 ही प्रथम चतुर्थक मान है ।

$\therefore$ $Q_1 = 30$

$$Q_3 = \text{Value of } \left(\frac{n+1}{4}\right) \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } 3\left(\frac{69+1}{4}\right)\text{th unit.}$$

=Value of (3×17.5)th unit.

=Value of 52.5th unit.

संचयी आवृति कॉलम देखने से स्पष्ट है कि 52.2 वीं इकाई आवृति 58 में शामिल है । अतः इससे सम्बन्धित प्राप्तांक 50 ही तृतीय चतुर्थक है ।

$$\therefore Q_3 = 50$$

सतत श्रेणी में चतुर्थक ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम सम्बन्धित चतुर्थक के आकार अथवा इकाई को निर्धारित किया जाता है । इसके लिए N ÷ 4 का उपयोग किया जाता है । प्राप्त भागफल को वांछित चतुर्थक क्रमांक से गुणा किया जाता है । प्राप्त गुणनफल को संचयी आवृति कॉलम में खोजकर चतुर्थक वर्ग ज्ञात कर लिया जाता है । तत्पश्चात निम्न सूत्र का उपयोग कर चतुर्थक मान ज्ञात कर लिया जाता है ।

$$Q = l_3 + \frac{l_2 - l_1}{f}(q - c)$$

यहाँ Q= वांछित चतुर्थक मान

l_1= चतुर्थक वर्ग की उच्च आवृत्ति

l_2= चतुर्थक वर्ग की सामान्य आवृति

f= चतुर्थक वर्ग की सामान्य आवृति

q= वांछित चतुर्थक क्रम का आधार

c= चतुर्थक वर्ग से पूर्व वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति ।

सतत श्रेणी में चतुर्थक निर्धारण को निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है:

उदाहरण 4- निम्न वितरण से प्रथम एवं तृतीय चतुर्थक का मान ज्ञात कीजिये :

Marks :	0–10,	10–20,	20–30,	30–40,	40–50,
No. of Students :	2	20	60	30	10

हल:

सतत श्रेणी में चतुर्थक का निर्धारण

Marks	No. of Students.	Cumulative Frequency (c.f.)
0–10	2	2
10–20	20	22
20–30	60	82
30–40	30	112
40–50	10	122

प्रथम चतुर्थक आकार $= (q_1) = \frac{n}{4}$ th unit.

$= \frac{122}{3}$ th unit.

= 30.5th unit.

संचयी आवृति कॉलम देखने से स्पष्ट है कि 30.5 वीं इकाई संचयी आवृत्ति 82 में शामिल है । अत: इसके सम्मुख लिखा 20-30 ही प्रथम चतुर्थक वर्ग है ।

$$Q_1 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}(q_1 - c)$$

$$= 20 + \frac{30-20}{60}(30.5 - 22)$$

$$= 20 + \frac{10}{60} \times 8.5$$

$$= 20 + \frac{85}{60} = 20 + 1.42 = 21.42$$

$$\therefore Q_1 = 21.42$$

तृतीय चतुर्थक आकार $(q_3) = 3\left(\frac{n}{4}\right)$ th unit.

$= 3\left(\frac{122}{4}\right)$ th unit.

=of (3×30.5) th unit.

=of 91.5th unit.

संचयी आवृत्ति कॉलम से स्पष्ट है कि 91.5 वीं इकाई संचयी आवृति 112 में शामिल है । अत: इससे सम्बन्धित 30-40 ही तृतीय चतुर्थ वर्ग है ।

$$Q_3 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}(q_3 - c)$$

$$= 30 + \frac{40-30}{30}(91.5 - 82)$$

$$= 30 + \frac{10}{30} \times 9.5$$

$$= 30 + \frac{9.5}{3} = 30 + 3.17 = 33.17$$

$$\therefore\ Q_3 = 33.17$$

दशमक

(Declies)

दशमक समंक-माला को दस बराबर भागों में बाँटता है । इसके कुल 9 मूल्य होते हैं । जिन्हें $D_1D_2.....D_9$ द्वारा व्यक्त किया जाता है ।

व्यक्तिगत श्रेणी

व्यक्तिगत श्रेणी में दशमक ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम सम्बन्धित दशमक इकाई का निर्धारण (n+1) ÷ 10 के द्वारा किया जाता है । फिर इस इकाई का मान ज्ञात कर लिया जाता है । वह वांछित दशमक का मान होता है । इसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण 5- निम्न समंकों से पाँचवा तथा आठवाँ दशमक ज्ञात कीजिये:

x: 5 8 9 12 15 16 18 20 21 24 27
30, 32, 34, 36, 40, 42, 43, 45,

हल:

S. No.

S. No.	x
1	5
2	8
3	9
4	12
5	15
6	16
7	18
8	20
9	21
10	24
11	27
12	30
13	32
14	34
15	36
16	40
17	42
18	43
19	46

यहाँ n=19

$$D_5 = \text{Value of } 5\left(\frac{n+1}{10}\right)\text{th unit.}$$

$$= \text{Values of } 5\left(\frac{19+1}{10}\right)\text{ th unit.}$$

$$= \text{Value of } 5\left(\frac{20}{10}\right)\text{thunit.}$$

=Value of 10th unit. सारणी से स्पष्ट है कि 10वीं इकाई का मान 24 है ।

अत: D5=24

$$D_8 = \text{Value of } 8\left(\frac{n+1}{10}\right)\text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } 8\left(\frac{20}{30}\right)\text{th unit.}$$

=Value of 16th unit.

सारणी से स्पष्ट है कि 16 वीं इकाई का मान 40 है । अत: D_8=40

$\therefore$ D_5=24 और D_8 = 40.

उदाहरण 6- निम्नलिखित से D4 तथा D6 का मान ज्ञात कीजिये :

Marks : 20, 25, 26, 30, 31, 33, 34, 36, 40, 42, 44, 46.

S. No.	**Marks**
1	20
2	25
3	26
4	30
5	31
6	33
7	34
8	36
9	40
10	42
11	44
12	42
13	44
14	46

(i) यहाँ n=12

$$\text{(i) D4 = Value of } 4\left(\frac{n+1}{10)}\right) \text{ th unit.}$$

$$= \text{Value of } 4\left(\frac{12+1}{10}\right) \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } (4 \times 1.3) \text{th unit.}$$

=Value of 5.2 th unit.

Value If 5th unit + .2 (difference between values of 6th and 5th units.)

31 + .2(33–31)

31 +.2(2)

=38+.4=31.4

D_4=31.4

$$\text{(ii) D6} = \text{Value of } 6\left(\frac{n+1}{1}\right) \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } 6\left(\frac{13}{10}\right) \text{th unit.}$$

=Value of (6 ×1.3)th unit.

= Value of 7.8 th unit.

=Value of 7th unit.+.8 (Diff between Value of 8th and 7th units)

34+.8 (36–34)

=30+.8(2)=34+1.6=35.6

$\therefore$ D_4=31.4, D_6=35.5

खण्डित श्रेणी :

खण्डित श्रेणी में दशमक ज्ञात करने की रीति वही है जो व्यक्तिगत श्रेणी में है । अन्तर केवल इतना है कि खण्डित श्रेणी में संचयी आवृति का एक पृथक कॉलम तैयार किया जाता है तथा वांछित दशमक आकार (Size) को संचयी आवृति को कॉलम को देखकर उसका मान निश्चित किया जाता है । इसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जाता है :

उदाहरण 7- निम्न वितरण से प्रथम और सातवें दशमक का मान ज्ञात कीजिये :

Rainfall : 30 32 34 36 38 40 42

Frequency : 5 15 12 18 30 25 20

Rainfall (in inches)	Frequency (f)	Cumulative frequency (C.F.)
30	5	5
32	15	20
34	12	32
36	18	50
38	30	80
40	25	105
42	20	125

प्रथम दशमक (D_1)

$$D_1 = \text{Value of } \frac{n+1}{10} \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } \left(\frac{125+1}{10}\right) \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } \frac{126}{10} \text{th unit.}$$

=Value of 12.6 th unit. यह प्रथम दशमक इकाई (12.6) संचयी आवृत्ति 20 में शामिल है । अतः इससे सम्बन्धित मान 32 ही प्रथम दशमक का मान है । $\therefore$ D_1=32

सातवाँ दशमक (D_7)

$$D_7 = \text{Value of } 7\left(\frac{n+1}{10}\right) \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } 7\left(\frac{125+1}{10}\right)\text{th unit.}$$

=Value of (7×12.6)th unit.

=Value of 88.2th unit. सारणी से स्पष्ट है कि 88.2 वीं इकाई संचयी आवृति 105 में शामिल है । अत: इसके सामने का पदमान ही वांछित दशमक मान है । D_7=40

सतत श्रेणी :

सतत श्रेणी में दशमक ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम वांछित दशमक आकार (इकाई) का पता किया जाता है । तत्पश्चात दशमक वर्ग का पता किया जाता है । इसके बाद निम्न सूत्र की मदद से दशमक का मान निर्धारित किया जाता है ।

$$D = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}(d - c)$$

यहाँ D= वांछित दशमक का मान

11= दशमक वर्ग की निम्न सीमा

12= दशमक वर्ग की उच्च सीमा

F= दशमक वर्ग की सामान्य आवृति

D= वांछित दशमक की पद-संख्या

C= दशमक वर्ग के पूर्व वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति ।

सतत श्रेणी में दशमक निर्धारण की प्रक्रिया को निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है:

उदाहरण 8- निम्न वितरण से D_7 का मान ज्ञात करें ।

Class :	5–10,	10–15,	15–20,	20–25,	25–30,
f :	10	20	30	20	10

हल:

Class	F.	C.F.
5–10	10	10
10–15	20	30
15–20	30	60
20–25	20	80
25–30	10	90

यहाँ $n = 90$

सातवें दशमक का आकार $(d_7) = 7\frac{n}{10}$ unit.

$$7 = \left(\frac{90}{10}\right)\text{th unit.}$$

= 63 वीं इकाई ।

यह इकाई (63) संचयी आवृत्ति 80 में शामिल है । इसके सामने का वर्ग 20-25 ही सातवें दशमक का वर्ग है ।

अब

$$D_7 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}(d_7 - c)$$

$$= 20\frac{25-20}{20}(63-60)$$

$$= 20 + \frac{5}{20} \times 3 = 20 + \frac{3}{4} = 20.75$$

$$\therefore D_7 = 20.75$$

शतमक (Perecentiles)

शतमक समंक माला को 100 बराबर भागों में बाँटता है । इसके विभाजक मूल्यों की संख्या 99 होती है । इसे $P_1P_2...P_{99}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है । शतमक मूल्यों के निर्धारण के लिए भी उन्हीं तकनीकों का इस्तेमाल किया जाता है जिनका उपयोग मध्यका, चतुर्थक अथवा दशमक के निर्धारण में होता है । शतमक इकाई (आकार) को पता करने के लिए व्यक्तिगत एवं खण्डित श्रेणियों में (n+1) 100 का उपयोग किया जाता है तथा प्राप्त भागफल को वांछित शतमक क्रमांक से गुणा किया जाता है । सतत श्रेणी में $n \div 100$ का उपयोग करते हैं तथा भागफल में वांछित शतमक क्रमांक से गुणा करके शतमक इकाई ज्ञात कर लिया जाता है । निम्न उदाहरण द्वारा व्यक्तिगत श्रेणी में शतमक श्रेणी में निर्धारण की प्रक्रिया को स्पष्ट किया जा सकता है ।

उदाहरण 9- निम्न समंकों से P_{20} का मान ज्ञात कीजिये ।

Marks	10	12	13	16	18	19	21	23	28	30
	35	40	43	45	50	52	56	60		62

हल:

S. No.	Marks
1	10
2	12
3	13
4	16

5	18
6	19
7	21
8	23
9	28
10	30
11	35
12	40
13	43
14	45
15	50
16	52
17	56
18	60
19	62

यहाँ n=19

$$P_{20} = \text{Value of } 20\left(\frac{n+1}{100}\right)\text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } 20\left(\frac{19+1}{100}\right)\text{th unit.}$$

Value of 4th unit

सारणी से स्पष्ट है कि चौथी इकाई का मूल्य 16 है ।

अत: P_{20}= 16

उदाहरण 10-निम्नलिखित से P_{60} और P_{96} का मान ज्ञात करें :-

Age (in years) :	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	22
Frequency :	3	6	10	15	24	20	10	8	30	5	7	6	8

हल

Age	F.	C.F.
9	3	3
10	6	9
11	10	9
12	15	34
13	24	58
14	20	78
15	10	88
		96
17	30	126
18	05	131
19	7	138
20	6	144
22	8	152

यहाँ n=152

$$P60 = \text{Value of } 60\left(\frac{n+1}{100}\right)\text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } 60\left(\frac{153}{100}\right)\text{th unit.}$$

=Value of 91.8th unit. यहाँ इकाई संचयी आवृत्ति 96 में शामिल है । अत: इससे सम्बन्धित पदमान 16 ही P60 का मान हुआ ।

$$\therefore P_{60} = 16$$

$$(ii) P_{60} = \text{Value of } 90\left(\frac{n+1}{100}\right)\text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } 90\left(\frac{153}{100}\right)\text{th unit.}$$

= Value of 137.7 th unit. यह इकाई संचयी आवृत्ति 138 में शामिल है । इस संबंधित पदमान 19 ही P_{90} का मूल्य है ।

$$\therefore = P_{90} = 90$$

सतत श्रेणी में शतमक ज्ञात करने के लिए सवप्रथम वांछित शतमक आकार अथवा इकाई (P) ज्ञात करते हैं । इसके लिए $n \div 100$ को वांछित शतमक क्रमांक से गुणा कर देते हैं । इस प्रकार इकाई को संचयी आवृत्ति में खोजकर शतमक वर्ग का पता कर लेते हैं । तत्पश्चात् उपर्युक्त सूत्र का उपयोग कर शतमक मान ज्ञात कर लिया जाता है । निम्न उदाहरण से इसे स्पष्ट किया जा सकता है ।

उदाहरण 11- निम्न से P_{27} का मान ज्ञात करें :

Class :	0–10,	10–20,	20–30,	30–40,	40–50,	50–60,	60–70
F:	5	10	15	30	15	10	5

हल

Class	**F. C.F.**
0–10	5
10–20	15
20–30	30
30–40	60
40–50	75
50–60	85
70–80	90

यहाँ n=90

$$\text{Size of } P_{75}\left(\frac{n}{100}\right)\text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } 75\frac{90}{100}\text{th unit.}$$

=Value of (75×.9) th unit.

=Value of 67.5 th unit. यह इकाई संचयी आवृत्ति 75 में शामिल है । अतः इससे संबंधित वर्ग 40-50 P_{75} का वर्ग है ।

$$P_{75} = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}(P_{75} - c)$$

$$= 40 + \frac{50 - 60}{15}(67.5 - 60)$$

$$= 40 + \frac{10}{15} \times 7.5$$
$$= 40 + 5 = 45$$
$$\therefore P_{75} = 45$$

अब तक के अध्ययन से स्पष्ट है कि एक समंक माला में Q_2, D_5 तथा P_{50} तीनों का मान बराबर होता है । ये सभी मूल्य श्रेणी को दो बराबर भाग में बाँटती हैं । दूसरे शब्दों में कहा जा सकता है कि एक समंक माला में

$M = Q_2 = D_5 = P_{50}$ होता है ।

विभाजन मूल्यों का बिन्दुरेखीय निर्धारण

मध्यका के ही समान चतुर्थक, दशमक तथा शतमक मूल्यों को भी बिन्दुरेखीय चित्रों द्वारा निर्धारित किया जा सकता है । इसके लिए संचयी आवृत्ति वक्र का उपयोग किया जाता है । सामान्यतः इस कार्य के लिए आरोही संचयी आवृत्ति वक्र (Less than type Cumulative frequency Curve) का उपयोग होता है । ध्यान रखने योग्य बात यह है कि खण्डित अथवा सतत दोनों ही श्रेणियों में विभाजन मूल्य का आकार पता करने के लिए कुल इकाइयों की संख्या (n) में संबंधित विभाजक मूल्यों की कुल संख्या से भाग दिया जाता है। उदाहरण के लिए द्वितीय चतुर्थक आकार के लिए $2 \times \frac{n}{4}$ तीसरे चतुर्थक आकार के लिए $3 \times \frac{n}{4}$ पाँचवें दशमक आकार के लिए $5 \times \frac{n}{10}$, छठे शतमक आकार के लिए $6 \times \frac{n}{100}$ आदि का उपयोग किया जायेगा । प्राप्त आकार को कोटि अक्ष (y-axis) पर निश्चित करके उस बिन्दु से भुजाक्ष (x-axis) के समानान्तर एक रेखा खींची जाती है । यह रेखा संचयी आवृति वक्र को जिस बिन्दु पर काटती है उस बिन्दु से भुजाक्ष पर लम्ब डाला जाता है । भुजाक्ष पर यह लम्ब जहाँ आकर गिरता है उस स्पर्श-बिन्दु का मूल्य ही संबंधित विभाजक का मान होता है । इसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जाता है ।

उदाहरण 12- निम्न वितरण से Q_2, D_6 तथा P_{70} का मान बिन्दुरेखीय रीति से ज्ञात करें ।

Marks :	0–20,	20–40,	40–60,	60–80,	80–100.
Frequency :	10	20	30	20	10

हल :

Class	F	Class	C.F
0–20	10	Less than 20	10
20–40	20	40	30
40–60	30	60	60
60–80	20	80	80
80–100	10	100	90

आदर्श प्रश्न

(MODEL QUESTIONS)

(1) निम्न बंटन से Q_3, D_5, तथा P_{80} का मान ज्ञात कीजिये ।

Production (in tonnes) : 50 55, 60, 62, 65, 68, 70, 79, 80, 82, 85,
87, 90, 95, 100, 105, 106, 120, 130.

(2) निम्न आवृत्ति से वितरण D_5, P_{50} तथा Q_2 ज्ञात करें ।

Marks	No. of Students.
30	4
40	10
50	14
60	30
70	10
80	9
90	5

(3) Find the 65th precentile and 8th decile from the following.

Class	F.
10–20	5
20–30	10
30–40	7
40–50	40
50–60	30
60–70	5
70–80	2

(4) निम्न वितरण से मध्यका तथा दोनों चतुर्थक मान ज्ञात करें ।

Heights below : 7, 14, 21, 28, 35, 42, 56

F 26, 57, 92, 134, 216, 250, 280, 300

(5) निम्न समंकों से तीसरे चतुर्थक, पाँचवें दशमक तथा 68 वें शतमक का मान ज्ञात करें ।

Age group	No. of Persons
1–5	3
6–10	18
11–15	13
16–20	8
21–25	13
26–30	10
31–35	5

36–40	15
41–45	3
46–50	10

(6) बिन्दुरेखीय रीति से Q_1, D_8 तथा P_{10} का मान ज्ञात करें :

Class	F.
10–20	10
20–30	14
30–40	30
40–50	10
50–60	4
60–70	2

(7) निम्न समंकों से P_{40} D_3 और Q_2 का मान ज्ञात करें:

मध्य मान	आवृति
10	15
20	20
30	30
40	45
50	35
60	20
70	10

(8) Calculate median and quartiles from the following.

x	f
10–20	4
10–30	16
10–40	56
10–50	97
10–60	124
10–70	137
10–80	146
10–90	150

(9) निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखें :

(क) चतुर्थक

(ख) संचयी आवृत्ति

(ग) शतमक

बारंबारता बंटनों के बिन्दु-रेखीय प्रदर्शन

[Graphical Presentation of frequency-distribution]

प्रिय छात्रो,

गत पाठ में हमलोगों ने कालिक बिन्दु रेखीय चित्रों का अध्ययन किया है । अब इस पाठ में हमलोग आवृत्ति वितरणों से संबंधित बिन्दु-रेखीय चित्रों के विषय में चर्चा करेंगे ।

बिन्दु-रेखीय चित्रों के इस वर्ग में खण्डित श्रेणी और सतत श्रेणी से संबन्धित चित्रों को शामिल किया जाता है । इन श्रेणियों को प्रदर्शित करने के लिए मुख्यत: निम्नलिखित बिन्दु-रेखीय चित्रों का प्रयोग किया जाता है-

(1) रेखा आवृत्ति चित्र (Line Frequency Graph)

(2) आयत चित्र (Histogram)

(3) आवृति बहुभुज (Frequency Polygon)

(4) आवृति वक्र (Frequency curve) और

(5) संचयी आवृत्ति वक्र (Cumulative Frequency curve)

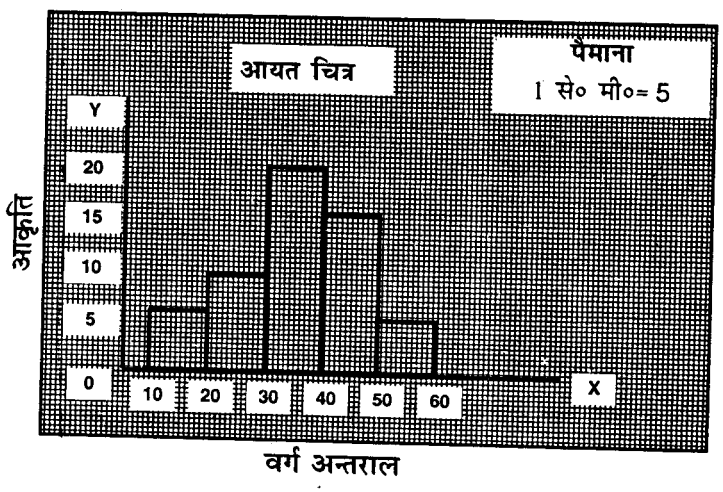
(1) रेखा आवृत्ति चित्र (Line Frequency Graph)– इस प्रकार के चित्र मुख्यत: खण्डित आवृत्ति वितरण से लिए तैयार किये जाते हैं । इसके अन्तर्गत खण्डित चर को आधार अक्ष (ox) पर तथा आवृत्ति को कोटि अक्ष (oy) पर दिखाया जाता है । ox रेखा पर प्रत्येक चर मान के लिए उसकी आवृत्ति की ऊँचाई के बराबर एक पतली खड़ी रेखा खींच दी जाती है । रेखा आवृत्ति चित्र का उपयोग सामान्यत: उस परिस्थिति में उपयुक्त होता है जब कम समय व स्थान में बहुत अधिक चरों के विषय में जानकारी देनी हो । एक उदाहरण के द्वारा रेखा आवृत्ति चित्र को निम्न प्रकार स्पष्ट किया जा सकता है-

उदाहरण-1

निम्नलिखित को बिन्दु-रेखीय चित्र के रूप में दिखावें :

पृष्ठों की संख्या (x) :	48	49	50	51	52	53	54	55
पुस्तकों की संख्या (f) :	5	10	15	20	14	12	9	4

हल :



(2) आयत चित्र (Histogram) - आयत चित्रों का निर्माण मुख्यत: सतत श्रेणी के लिए किया जाता है । आयत चित्र दो तरह के हो सकते हैं-(A) समान वर्गान्तर चित्र और (B) असमान वर्गान्तर वाला आयत चित्र ।

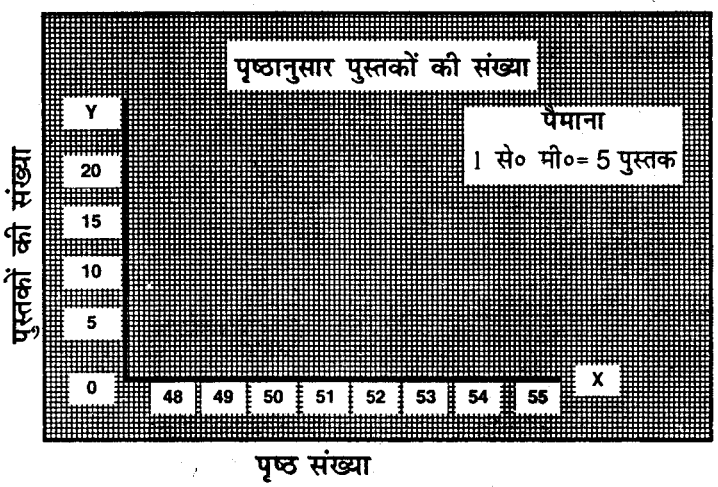
(A) समान वर्गान्तर वाला आयत चित्र (Histogram of equal class intervals)– समान वर्गान्तर वाली सतत श्रेणी से आयत चित्र की रचना करते समय वर्गान्तर को ox रेखा पर तथा आवृत्ति को oy रेखा पर दिखाया जाता है । प्रत्येक वर्गान्तर के लिए उसकी आवृत्ति की ऊँचाई के बराबर आयत एक दूसरे से सटे हुए बनाये जाते हैं । इन्हीं आयतों के समूह को आयत चित्र कहा जाता है । इसे उदाहरण के द्वारा निम्न प्रकार दिखाया जा सकता है-

उदाहरण-2

निम्नलिखित आवृत्ति वितरण से आयत चित्र की रचना करें ।

Class	No. of Families
10–20	5
20–30	10
30–40	20
40–50	12
50–60	4

हल :



आयत चित्र से बहुलक की गणना

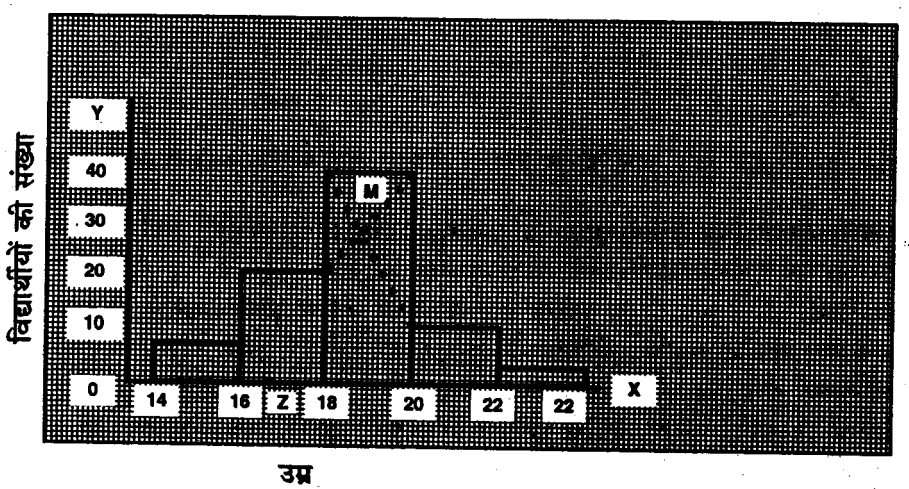
आयत चित्र के माध्यम से बहुलक (Mode) की गणना की जा सकती है । इसके लिए दिये गये वितरण में बहुलक वर्ग को निर्धारित किया जाता है । सामान्यत: अधिकतम आवृत्ति वाला वर्ग होता है । फिर बहुलक वर्ग के लिये बनाये गये आयत, जो आयत चित्र का सबसे ऊँचा आयत होता है, के ऊपरी कोणों को उसके पहले तथा बाद वाले आयत के समान कोणों की सीधी रेखा द्वारा मिलाया जाता है । ये रेखाएँ जहाँ एक दूसरे को काटती हैं वहाँ से ox अक्ष पर एक लम्ब खींचा जाता है । यह लम्ब ox को जिस बिन्दु पर स्पर्श करता है उसी बिन्दु पर स्थित मूल्य बहुलक मूल्य होता है । निम्न उदाहरण से आयत चित्र के माध्यम से बहुलक की गणना विधि को स्पष्ट किया जा सकता है-

वाणिज्य महाविद्यालय के प्रथम वर्ष के विभिन्न उम्र के वर्ग की छात्रों की संख्या निम्न प्रकार है-

Age group	No. of Students.
14–16	5
16–18	20
18–20	40
20–22	10
22–24	2

उपर्युक्त समंकों से बहुलक उम्र की गणना आयत चित्र बनाकर करें ।

हल:



उपर्युक्त चित्र से स्पष्ट है कि बहुलक वर्ग 18-20 ही है । इसी से संबन्धित आयत अन्य सभी आयतों से ऊँचा है । अतः इसके ऊपरी दाहिने कोण को इसके पूर्व वाले आयत के ऊपरी दाहिने कोण से टूटी-फूटी रेखा से मिलाया गया है । इसी प्रकार बहुलक आयत के बायें कोण को उसके बाद वाले आयत के ऊपरी बायें कोण से टूटी-फूटी रेखा द्वारा मिला दिया गया है । ये दोनों रेखाएं एक दूसरे को M बिन्दु पर काटती हैं । इसी बिन्दु अर्थात् M से एक लम्ब MZ खींचा गया है जो ox रेखा को Z बिन्दु पर काटता है । यहाँ कटान बिन्दु अर्थात् Z बहुलक बिन्दु है । इसी बिन्दु का मान होगा । यहाँ बहुलक का मान 18.8 है । इसकी सत्यता की जाँच अवश्य कर लेनी चाहिए जो निम्न प्रकार की जायेगी :

यहाँ स्पष्ट है कि बहुलक वर्ग = 18-20

बहुलक वर्ग की आवृत्ति (f_1)=40

बहुलक वर्ग के पूर्व वर्ग की आवृत्ति (f_0)=20

बहुलक वर्ग के बाद वाले वर्ग की आवृत्ति (f_2)=10

वर्ग अन्तराल अर्थात् (i) = 20-18=2

हम जानते हैं कि

$$Z = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f2} xi$$

अब उपर्युक्त सूत्र में मान रखने पर

$$Z = 18 + \frac{40 - 20}{2 \times 40 - 20 - 10} \times 2$$

$$= 18 + \frac{20}{50} \times 2$$

=18 + 0.8

=18.8

अर्थात् बहुलक मान = 18.8

अतः गणितीय विधि तथा बिन्दु रेखीय विधि दोनों ही विधियों से निकाले गये बहुलक मान में कोई अन्तर नहीं होता है ।

(B) असमान वर्गान्तर वाला आयत चित्र (Histogram of unequal class intervals)–कभी-कभी दिये गये वर्ग वर्गान्तर का विस्तार समान नहीं होता । ऐसे असमान वर्गान्तरों वाली श्रेणी से आयत चित्र की रचना करने के पूर्व सर्वप्रथम तो हम यह प्रयास करते हैं कि वर्गान्तरों को समान बना लिया जाय । यदि दो या अधिक वर्गों को मिला देने से वर्गान्तर समान हो जाय तो ऐसा कर लेते हैं । तत्पश्चात समान वर्गान्तर वाले आयत चित्र का निर्माण पूर्व विधि के अनुसार कर लेते हैं । इसके विपरीत जब वर्गान्तरों को समान बनाना सम्भव नहीं हो तब आवृत्ति का घनत्व (Frequency density) निकाला जाता है । वर्गान्तरों को असमान ही रहने दिया जाता है । उसके बाद वर्गान्तरों को ox रेखा पर तथा आवृत्ति के घनत्व को oy रेखा पर प्रांकित कर आयात चित्र की रचना कर ली जाती है । इसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है-

उदाहरण-4

निम्न वितरण से आयत चित्र की रचना करें ।

Class	Frequency (f)
5–10	2
10–12	3
13–15	2
15–20	10
20–24	3
24–25	2
25–30	3
30–35	2