$$\text{or } \overline{X} = \frac{7340}{60} = 122.23$$

(iii) Calculation of $—_3$

$$-_{123} = \sqrt{\frac{N_1(-1^2 + D_1^{\ 2}) + N_2(-2^2 + D2^2) + N_3(-3^2 + D2^2)}{N_2 + N_2 + N_3}}$$

$D_1 = \overline{X}_1 - \overline{X}_{123}$ or $112 - 116 = -4$

$D_2 = \overline{X}_2 - \overline{X}_{123}$ or $122.33 - 116 = 6.33$

$D_2 = \overline{X}_2 - \overline{X}_{123}$ or $114 - 116 = 2$

सूत्र में मान रखने पर

$$8 = \sqrt{\frac{50(6^2 + (-4)^2) + 60(7^2 + (6.33)^2) + 90(-2^2 + 2^{2)}}{50 + 60 + 90}}$$

$$8 = \sqrt{\frac{(50 \times 2) + 60(49 + 40.1) + 90(4 + -3^2)}{200}}$$

$$64 = \frac{(50 \times 52) + (60 \times 89.1) + 360 + 90 - 3^2}{200}$$

$200 \times 64 = 2600 + 5346 + 360 + 90 — 3^2$

$12800 = 8306 + 90 — 3^2$

$12800 — 8306 = 90 — 3^2$

$4496 = 90 — 3^2$

$$\therefore \ j\ 3^2 = \frac{4496}{90}$$

$$\therefore \ j\ 3 = \sqrt{\frac{4496}{90}} = \sqrt{49.9555} = 7.067 \text{ or } 7.1$$

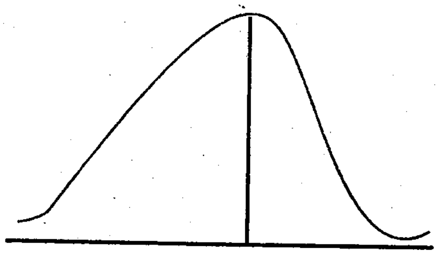
$$\therefore \ j\ 3 = 7.1$$

विषमता
(Skewness)

विभिन्न औसतों से हमें समंकमाला की केन्द्रीय प्रवृत्ति का ज्ञान हो जाता है । अपकिरण के विभिन्न मापों से हमें यह पता चलता कि श्रेणी के विभिन्न पदमान उसके किसी औसत से कहाँ तक दूर हटने की प्रवृत्ति रखते हैं । उनका औसत विचलन क्या है ? किन्तु सांख्यिकीय औसतों तथा अपकिरण के विभिन्न मापों से हमें यह पता नहीं चलता कि समंकमाला की बनावट कैसी है ? आवृति वितरण का स्वरूप कैसा है ? आवृतियों के विभिन्न मापों से हमें यह पता नहीं चलता कि समंकमाला की बनावट कैसी है ? आवृति वितरण का स्वरूप कैसा है ? आवृतियों का फैलाव माध्य के किस ओर ज्यादा अथवा कम है ? इन्हीं बातों की जानकारी देने वाली सांख्यिकी तकनीक को विषमता कहा जाता है ।

विषमता का अर्थ एवं परिभाषा-विषमता को भली-भाँति समझने के लिए यह आवश्यक है कि पहले आवृति वितरण को सममित (Symmetrical) तथा असममित दो वर्गों में बाँटा जाता है ।

(1) सममित वितरण (Symmetrical Distribution)—सममित वितरण से तात्पर्य उस आवृत्ति वितरण से है जिसकी आवृत्तियाँ एक निश्चित क्रम से बढ़ते हुए एक बिन्दु पर अधिकतम होकर पुन: पहले वाले क्रम से ही घटने लगती हैं । अधिकतम बिन्दु के दोनों ओर उनका फैलाव समान रहता है । ऐसे आवृति वितरण को अगर वक्र खींच कर दिखाया जाए तो वक्र का आकार एक घंटी के समान होता है । इसे निम्न चित्र द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है ।



(i) $\overline{X} = M = Z$

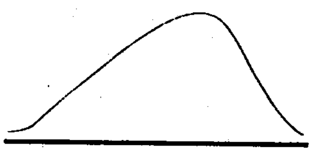
(ii) $(M - Q_1) = (Q_3 - M)$

ऊपर के चित्र से स्पष्ट है कि सममित वितरण के वक्र को अगर बीच में मोड़ दिया जाय तो दानों भाग एक दूसरे को पूर्णत: ढँक लेंगे । एक वितरण की यह विशेषता है कि :–

(i) इसके समान्तर माध्य ($\overline{X}$), मध्यका (Median) तथा बहुलक (Z) तीनों का मान बराबर होता है और ये तीनों ही वितरण के मध्य में स्थित होते हैं ।

(ii) ऐसे वितरण में मध्यका (M) तथा प्रथम चतुर्थक (Q_1) का अन्तर बराबर होता है तृतीय चतुर्थक (Q_3) और मध्यका के अन्तर के । अर्थात् $M - Q_1 = Q_3 - M$.

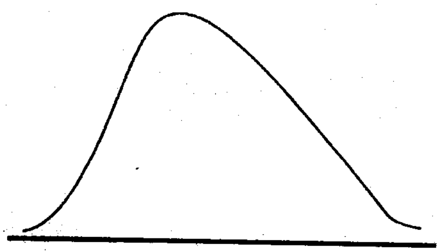
(2) असमित वितरण-सममित वितरण के विपरीत असममित वितरण में आवृतियों के बढ़ने-घटने का कोई निश्चित क्रम नहीं होता । अधिकतम बिन्दु के दोनों ओर उनका विस्तार समान नहीं होता । ऐसे वितरणों से तैयार किये गए वक्र घण्टा के आकार के नहीं होते । वे दांये अथवा बायें झुके हुए होते हैं । ऐसे वक्रों का चित्र निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है :



(i) $X > M > Z$

(ii) $(Q_3 - M) > (M - Q1)$

(A)



(i) $X < M < Z$

(ii) $(Q_3 - M) < (M - Q_1)$

(B)

असममित वक्रों को देखने से स्पष्ट है कि इनको दो समान भागों में बाँटा जा सकता है । इनका एक छोर दूसरे छोर से बड़ा अथवा छोटा अवश्य होता है । इनकी यही असमानता इनमें विद्यमान विषमता का द्योतक है । ऐसे वितरणों को विषम वितरण भी कहा जाता है । इनकी यही विशेषता है कि इनके समान्तर माध्य ($\overline{X}$), मध्यका (M) तथा बहुलक (Z) तीनों के मानों में अन्तर होता है : असममित वितरण

के मध्यका से उसके दोनों चतुर्थकों का अन्तर भी समान नहीं होता ($M - Q_1 \neq Q_3 - M$) असममित वितरण में विषमता पायी जाती है । अतः उपर्युक्त वर्णन के आधार पर कहा जा सकता है कि किसी आवृति की सममिति (Symmetry) से अलग हटने की प्रवृति ही विषमता है। दूसरे शब्दों में जहाँ सममिति का अभाव हो वहीं असममिति (Skewness) होता है । विषमता की परिभाषा देते हुए सिम्पसन एवं काफ्का ने लिखा है कि ''विषमता अथवा असममिति किसी आवृति वितरण की एक विशेषता है जो अधिकतम आवृति वाले वर्ग के एक ओर दूसरी ओर की अपेक्षा अधिक बढ़ जाती है । "Skewness of Asymmetry is the attribute of a frequency distribution that extends further on one side of the class with the highest frequency than on the other." वेसल, विलेट तथा साइमेन (Wessel, Willeett and Simone) के अनुसार, ''विषमता सममिति का अभाव है । विषमता का कोई भी माप यह बतलाता है कि सामान्य वितरण की तुलना में एक विशेष वितरण के पदों का फैलाव किस प्रकार से भिन्न है ।'' Skewness is lack of Symmetry. Any measure of skewness indicates the difference between the manner in which items are distributed in a particular distribution compared with a normal distribution."

विषमता के प्रकार (Types of Skewness)–विषमता निम्न दो प्रकार की होती है ।

(i) धनात्मक विषमता (Positive Skewness)–जिस विषय वितरण का दायां भाग अधिक विस्तृत हो उसमें पायी जाने वाली विषमता धनात्मक (+) होती है । इसमें समान्तर माध्य का मान सबसे अधिक होता है तथा बहुलक का मान सबसे कम होता है । ऐसे वितरण में तृतीय चतुर्थक और मध्यका का अन्तर ($Q_3 - M$),मध्यका और प्रथम चतुर्थक के अन्तर ($M - Q_1$) के चित्र (B) ऋणात्मक विषमता की स्थिति को दर्शा रहा है ।

(ii) ऋणात्मक विषमता (Negative Skewness)–जिस विषम वितरण वक्र का बायां छोर अधिक विस्तृत हो उसमें ऋणात्मक विषमता पायी जाती है । ऐसे वितरण में समान्तर माध्य का मान सबसे छोटा तथा बहुलक का मान सबसे बड़ा होता है । मध्यका और तृतीय चतुर्थक का अन्तर ($Q_3 - M$) छोटा होता है, मध्यका और प्रथम चतुर्थक के अन्तर ($M - Q_1$) के चित्र (B) ऋणात्मक विषमता की स्थिति को दर्शा रहा है ।

विषमता की माप

(Measures of Skewness)

किसी वितरण में विषमता को मापने के लिए निम्न विधियां प्रयोग में लायी जा सकती हैं :

1. कार्ल पियर्सन की विधि (Kari Pearson's Method)
2. बाउले की विधि (Bowley's Method)
3. केली की विधि (Kelley's Method)

1. कार्ल पियर्सन की विधि-कार्ल पियर्सन महोदय द्वारा प्रतिपादित इस विधि को विषमता का प्रथम माप (First Measure of Skewness) भी कहा जाता है। इस विधि में माध्यों के अन्तर को ही विषमता का माप बनाया गया है । हम जानते हैं कि किसी श्रेणी के माध्यों में अन्तर होना ही विषमता की परिचायक है । यह अन्तर जितना अधिक होगा विषमता भी उतनी ही अधिक होगी । कार्ल पियर्सन महोदय ने विषमता तथा विषमता गुणांक को मापने के लिए निम्नलिखित सूत्रों का उल्लेख किया है :

(i) Skewness (SK) = $\overline{X} - Z$

(ii) Coefficient of Skewness (J) = $\dfrac{\overline{X} - Z}{j}$ or $\dfrac{SK}{j}$

अगर किसी वितरण में बहुलक (Z) का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता है तो तब विषमता तथा विषमता गुणांक को ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्रों का प्रयोग किया जाता है :

(i) SK = 3 ($\overline{X}$–M)

(ii) $J = \dfrac{(\overline{X} - M)}{j}$

निम्न उदाहरणों के द्वारा विषमता मापने की विधियों को स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण-3

Calculate the coefficient of skewness by KarL Pearson's method from the following data :

Age in Years : 10 12 12 12 14 20 25 27 28 30

विषमता गुणांक निकालने के लिए हमें समान्तर माध्य ($\overline{X}$), बहुलक (Z) तथा प्रमाप विचलन (—) को ज्ञात करना है ।

Calculation of $\overline{X}$, Z and —

Age in Years (X)	dA/20	d^2A	
10	−10	100	
12	− 8	64	
12	− 8	64	
12	− 8	64	
14	− 6	36	
20	0	0	
25	5	25	
27	7	49	
28	8	64	
30	10	100	
N =10	$\Sigma dA = -10$	$\Sigma d^2A = 566$	

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma dA}{N}$$

$$= 20 + \frac{-10}{10}$$

= 20 - 1 = 19 years.

Standard Deviation (—)
Z = Most popular value.
देखने से स्पष्ट है कि श्रेण में 12 की आवृति सबसे अधिक है अत: यह सबसे लोकप्रिय मान है । अत: Z = 12 Years

$$j = \sqrt{\frac{\Sigma d^2A}{N} - \left(\frac{\Sigma dA}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{566}{10} - \left(\frac{-10}{10}\right)^2} = \sqrt{56.6 - 1}$$

$= \sqrt{55.6} = 7.456$ or 7.5

$$\text{Coefficient of Skewness (J)} = \frac{\bar{X} - Z}{j} = \frac{19-12}{7.5}$$

$$= \frac{7}{7.5} = 0.933$$

$\therefore \quad J = +0.93$

उदाहरण-4

Find the coefficient of Skewness

Size :	5	10	15	20	25	30	35	40
Frequency :	10	15	30	8	5	10	6	4

हल :

Cacluation in Coefficient of Skewness

Size	f.	dA/A=20	fdA	fd²A	
5	10	−15	−150	2250	
10	15	−10	−150	1500	
15	30	− 5	−150	750	
20	8	0	0	0	
25	5	5	25	125	
35	6	15	90	1350	
40	4	20	80	1600	
	N = 88	$\Sigma dA =$	$\Sigma dA = -155$	$\Sigma dd^2A = 8575$	

(i) $\bar{X} = A + \frac{\Sigma fdA}{N} = 20 + \frac{-155}{88} = 20 - 17.6 = 18.24$

(ii) Z :

देखने से स्पष्ट है कि 15 की आवृति सबसे अधिक है । अतः Z = 15.

(iii) Standard Deviation :

$$j = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2A}{N} - \left(\frac{\Sigma fdA}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{8575}{88} - \left(\frac{-155}{88}\right)^2}$$

$$= \sqrt{97.44 - (1.76)^2} = \sqrt{97.44 - 3.10} = \sqrt{94.34}$$

$$= 9.71$$

Coeffcient of Skewness (J) :

$$J = \frac{\overline{X} - Z}{j} = \frac{18.24 - 15}{9.71} = \frac{3.24}{9.71} = 0.33$$

$\therefore \quad J = +0.33$

उदाहरण-5

Calculate Karl Peasrson's Coefficient of Skewness from the following distribution :

Age in years :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
No. of persons :	10	15	24	25	10	10	6

हल :

(i) Calculation of Mode (Z)

Age Class	No. of persons f(i)	ii	iii	iv	v	vi
0 – 10	10	25		**49**		
10 – 20	15		**39**		**64**	
20 – 30	24	**49**				
30 – 40	**25**		35			**59**
40 – 50	10	20		45	26	
50 – 60	10		16			
60 – 70	6					

Analytical Table

Column No.	Class having maximum frequency						
	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
i				1			
ii			1	1			
iii		1	1				
iv	1	1	1				
V		1	1	1			
vi			1	1	1		
Total	1	3	5	4	1		

विश्लेषण सारणी से स्पष्ट है कि 20 - 30 ही बहुलक वर्ग है ।

चूँकि बहुलक का वर्ग 20 - 30 की आवृत्ति उसके बाद वाले वर्ग 30 - 40 की आवृत्ति से कम है अतः बहुलक ज्ञात करने के लिए वैकल्पिक सूत्र का उपयोग किया जायेगा जो निम्न प्रकार है :

$$Z = l_1 + \frac{f_2}{f_0 + f_2} \times i$$

यहाँ

1_1 = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा = 20

f_2 = बहुलक वर्ग के बाद वाले वर्ग की आवृति = 25

f_0 = बहुलक वर्ग के पूर्व वाले वर्ग की आवृति = 15

i = बहुलक वर्ग के पूर्व वाले की आवृति = 15

सूत्र में मान रखने पर :

$$Z = 20 + \frac{25}{15 \times 25} \times 10$$

$$= 20 + \frac{25}{40} \times 10$$

$$= 20 + 6.25$$

= 26.25 Years.

Calculation of Arithmetic Mean and Standard Deviation.

Age Class	f.	M.V.	dA/A	d¹A/i=10	fd¹A	f.d¹²A
0 – 10	10	5	–30	–3	–30	90
10 – 20	15	15	–20	–2	–30	60
20 – 30	24	25	–10	–1	–24	24
30 – 40	25	35	0	+0	0	0
40 – 50	10	45	10	1	10	10
50 – 60	10	55	20	2	20	40
60 – 70	6	65	30	3	18	54
	$\Sigma N = 100$				–36	278

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fd^1A}{N} \times i$$

$$= 35 + \frac{-36}{100} \times 10$$

= 35 - 3.6

= 31.4 Years.

Standard Deviation :

$$-=i\times\sqrt{\frac{\Sigma fd^{12}A}{N}-\left(\frac{\Sigma fd^{1}}{N}\right)^{2}}$$

$$-=10\times\sqrt{\frac{278}{100}-\left(\frac{-36}{100}\right)^{2}}$$

$$=10\times\sqrt{2.78-0.13}=10\times\sqrt{2.65}$$

$$=10\times1.6278=16.278 \text{ or } 16.3$$

Coefficient of skewness :

$$j=\frac{\bar{x}-z}{j}=\frac{31.4-26.25}{16.3}=\frac{5.15}{16.3}=0.32$$

$$\therefore \quad j=+0.32$$

2. बाउले की विधि-डा० ए० एल० बाउले ने विषमता तथा उसके गुणांक का मापने के लिए मध्यका तथा प्रथम एवं तृतीय चतुर्थक का उपयोग करते हुए निम्न सूत्र का प्रतिपादन किया है ।

Skewness = $Q_3+Q_1=2M$

Coefficient of Skewness= $\frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$

बाउले की विधि को विषमता का द्वितीय माप (Second measure of Skewness) भी कहा जाता है । इसे Quartile measure of skewness भी कहा जाता है । इस विधि से प्राप्त Skewness को संक्षेप में SKQ तथा विषमता गुणांक को JQ से दर्शाया जाता है। निम्न उदाहरणों से इसकी गणना विधि को स्पष्ट किया जा सकता है ।

उदाहरण-6

दुर्घटनाओं में मारे गये व्यक्तियों से संबंधित निम्न समंकों से बाउले विधि द्वारा विषमता एवं विषमता गुणांक ज्ञात करें ।

दुर्घटना	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
मृतक संख्या	15	16	21	10	17	8	4	2	1	2	2	2

हल :

मध्य तथा चतुर्थकों की गणना

दुर्घटना	मृतक संख्या (f)	c.f.
1	15	15
2	16	31
3	21	52
4	10	62
5	17	79

दुर्घटना	मृतक संख्या (f)	c.f.
6	8	87
7	4	91
8	2	93
9	1	94
0	2	96
11	2	98
12	2	100

प्रथम चतुर्थक (Q_1) :

$$Q1 = \text{Value of } \frac{N+1}{4}$$

$$= \text{Value of } \frac{100+1}{4} \text{th unit.}$$

= Value of 25.25 th unit जो c.f. 31 में शामिल है । अत: Q_1=2,

मध्यका (M) :

$$M = \text{Value of } \frac{N+1}{2} \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } \frac{100+1}{2} \text{th unit.}$$

= Value of 50.5 th unit जो c.f. 52 में शामिल है अत: M = 3.

तृतीय चतुर्थक (Q_3) :

$$Q_3 = \text{Value of } \frac{3(N+1)}{4} \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } \frac{3(100+1)}{4} \text{th unit.}$$

= Value of 75.75 th unit. जो c.f. 79 में शामिल है । अत: Q_3=5

विषमता (SKQ) :

$$SKQ = Q_3 + Q1 = 2M$$
$$= 5 + 2 - 2 \times 3$$
$$= 7 - 6$$

= 1 दुर्घटना

विषमता गुणांक (JQ) :

$$JQ = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{5 + 2 - (2 \times 3)}{5 - 2} = \frac{1}{3} = 0.33$$

$\therefore$ JQ = +0.33.

उदाहरण-7

Calculate the Bowley's coefficient of skewness of the following data :

Class :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 –50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
f :	6	12	22	48	56	32	18	6

हल :

Calculation of Coefficient of Skewness.

Class	f.	c.f.
0 – 10	6	6
10 – 20	12	18
20 – 30	22	40
30 – 40	48	88
40 – 50	56	144
50 – 60	32	176
60 – 70	18	194
70 – 80	6	200

प्रथम चतुर्थक (Q_1)

$$\text{Size of } Q_1 = \frac{N}{4}\text{th unit}$$

$= \frac{200}{4}$ th unit of 50 th unit जो c.f. 88 में शामिल है । अतः 30 – 40 ही प्रथम चतुर्थक वर्ग है ।

$$Q_1 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}(q_1 - 0)$$

$$= 30 + \frac{40 - 30}{48}(50 - 40)$$

$$= 30 + \frac{10}{48} \times 10$$

$$= 30 + \frac{100}{48} \times 10$$

$$= 30 + \frac{100}{48} = 30 + 2.08 = 32.08$$

मध्यका (M) :

$$\text{Size of m } = \frac{N}{2}\text{th unit}$$

$$= \frac{200}{2}\text{th unit}$$

= 100 th unit जो c.f. 144 में शामिल है । अत: 40 - 50 ही मध्यका वर्ग है ।

$$M = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}(m - 0)$$

$$= 40 + \frac{50-40}{56}(100 - 88)$$

$$= 40 + \frac{10}{56} \times 12$$

= 40 + 2.14 = 42.14

तुतीय चतुर्थक (Q_3) :

$$\text{Size of } q_1 = \frac{3N}{4} \text{th unit}$$

$$= 3 \times \frac{200}{4} \text{th unit}$$

= 150th unit जो c.f. 176 में शामिल है । अत: 50-60 ही तृतीय चतुर्थक वर्ग है ।

$$Q_3 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}(q_3 - c)$$

$$= 50 + \frac{60-50}{32}(150 - 144)$$

$$= 50 + \frac{10}{32} \times 6$$

$$= 50 + \frac{60}{32}$$

= 50 + 1.875 = 51.875 or 51.88

Coefficient of Skewness :

$$JQ = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} = \frac{51.88 + 32.08 - 2 \times 42.14}{51.88 - 32.08}$$

$$= \frac{83.96 - 84.28}{19.80} = \frac{-0.32}{19.80} = 0.016$$

$$\therefore JQ = -0.016 \text{ or } -0.02$$

(3) केली की विधि-केली ने दशमक (Deciles) तथा शतमक (Percentiles) के प्रयोग से विषमता तथा उसके गुणांक की गणना का निम्न सूत्र बताया है :

1. दशमक के आधार पर

$$\text{Skewness} = D_2 - \frac{D_9 + D_1}{2}$$

$$\text{Coefficient of Skewness} = \frac{D_9 + D_1 - 2(D_5)}{D_9 - D_1}$$

2. शतमक के आधार पर :

Skewness = $P_{90} + P_{10} - 2P_{50}$

$$\text{Coefficient of Skewness} = \frac{P_{90} + P_{10} - 2P_{50}}{P_{90} - P_{10}}$$

इस रीति का उपयोग व्यवहार में बहुत कम होता है । आमतौर पर कार्ल पियर्सन की रीति का ही उपयोग किया जाता है । अगर प्रश्न में किसी विशेष विधि का संकेत नहीं दिया हो तो हमें सदा कार्ल पियर्सन की विधि का ही उपयोग करना चाहिए ।

अपकिरण एवं विषमता में भेद

((Distinction Between Dispersion and Skewness)

अपकिरण एवं विषमता में मुख्यत: निम्नलिखित अन्तर हैं-

(1) अपकिरण किसी श्रेणी में किसी माध्य से उसके विभिन्न पदमूल्यों के बिखराव को बताता है तो विषमता समंकमाला के सममित अथवा सममित होने की जानकारी देती है । यदि कोई श्रेणाी असममित है तो उसकी दिशा क्या है ? अर्थात विषमता धनात्मक है अथवा ऋणात्मक ।

(2) अपकिरण के अन्तर्गत वितरण के विभिन्न पदों की सामूहिक स्थिति पर विचार किया जाता है तो विषमता के अन्तर्गत उनकी प्रवृत्ति पर विचार किया जाता है ।

(3) अपकिरण विचलन की औसत मात्रा को बताता है जबकि विषमता विचलन की दिशा का स्पष्ट संकेत देती है ।

(4) अपकिरण माध्य से लिए गए विचलनों का माध्य होता है अत: वह माध्य का ही एक रूप है । उसे Average of the second order कहा जाता है किन्तु विषमता माध्यों की मदद से ज्ञात किए जाने के बाद भी माध्य का कोई रूप नहीं होता । विषमता के सभी माप Average of the first order पर आधारित हैं ।

(5) अपकिरण के माध्य की प्रतिनिधित्व क्षमता का पता चलता है जबकि विषमता से वितरण के सामान्य होने या न होने का पता चलता है ।

(6) अपकिरण के माप प्रथम और द्वितीय अपकिरण घातों (Moments of Dispersion) पर आधारित हैं पर विषमता के माप प्रथम और तृतीय घातों पर आधारित हैं ।

उपर्युक्त अन्तर के बावजूद अपकिरण तथा विषमता के माप एक दूसरे के अनुपूरक हैं । वस्तुत: आवृति वितरण के विधिवत अध्ययन के लिए केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों, अपकिरण तथा विषमता तीनों की जानकारी आवश्यक होती है ।

●

आदर्श प्रश्न

(Model Questions)

1. विषमता का अर्थ स्पष्ट करें तथा इसके विभिन्न मापों को समझावें ।

2. From the following data find out Kari Person's coefficient of skewness :

Measurements :	10	11	12	13	14	15
Frequency :	2	4	10	8	5	1

3. निम्न समंकों से विषमता गुणांक ज्ञात करें :

X :	10	14	13	12	10	15	13	18	13	10

4. निम्नलिखित वितरण का विषमता गुणांक निकालें :

Marks (Up to) :	10	20	30	40	50	60	70
No. of students :	7	16	28	63	74	80	83

5. निम्न समंकों से सामूहिक माध्य तथा सामूहिक प्रमाप विचलन ज्ञात करें :

श्रेणी A : पद संख्या $= 150,\ \overline{X} = 72j\ = 7$

श्रेणी B: पद संख्या $= 250,\ \overline{X} = 73j\ = 6.4$

6. निम्न वितरण का बाउले की विधि से विषमता गुणांक ज्ञात करें :

Mid values :	10	20	30	40	50	60	70	80
Frequency :	15	35	50	70	120	130	160	200

7. Calculate the Skewness and its coefficient :

Marks (more than):	0	10	20	30	40	50	60
No. of students :	100	95	80	60	40	30	15

8. Calculate quartile measures of skewness and its coefficient from the following—

Marks (less than) :	10	20	30	40	50
No. of students :	5	12	32	44	50

9. निम्न दो समूहों में से कौन अधिक सममित है ?

(i) Mean = 22 Median = 24 S.D. = 10

(ii) Mean = 25 Median = 25 S.D. = 12

10. In a distribution the difference between two quartiles is 20 and their sum is 50 and its median is 21. Find the coefficient of skewness.

परिघात

(Moment)

प्रिय छात्रो,

परिघात यांत्रिकी (Mechanics) का एक प्रचलित शब्द है । इसका तात्पर्य घुमाव करने वाली प्रवृत्ति से संबंधित किसी शक्ति के एक माप से है । सांख्यिकी में भी परिघात को उसी अर्थ में स्वीकार किया गया है । वॉ ने परिघात की परिभाषा देते हुए लिखा है ''परिघात वास्तव में किसी समंक-माला के समान्तर माध्य से उसके विभिन्न मूल्यों तक के लिए गये विचलनों के प्रथम, द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ आदि घातों (Powers) का समान्तर माध्य होता है । "The arithmetic mean of the various powers of these deviations in any distribution are called the moments of the distributuion." इस प्रकार स्पष्ट है कि किसी भी समंकमाला में उसके माध्य से लिये गये विचलनों के प्रथम, द्वितीय, चतुर्थ आदि घातों के समान्तर माध्य को परिघात कहा जाता है । परिघात को ग्रीक वर्णमाला के अक्षर (μ) से दर्शाया जाता है जिसका उच्चारण म्यू (mu) किया जाता है । घात संख्या को इसी अक्षर (μ) के साथ लिखा जाता है, जैसे- $\mu_1\ \mu_3\ \mu_4 \ldots \mu_n$ ।

सांख्यिकीय विवेचन में परिघात का अत्यधिक महत्व है । परिघातों की सहायता से आवृत्ति वितरण की अनेकानेक विशेषताओं पर प्रकाश डाला जाता है । इसके सहारे आवृत्ति वितरणों की बनावट, उनकी केन्द्रीय प्रवृत्ति, विचरण की मात्रा, वक्र का स्वरूप आदि अनेक विशेषताओं का स्पष्ट अध्ययन किया जा सकता है ।

समंकमाला के वास्तविक समान्तर माध्य से निकाले गये परिघातों को केन्द्रीय परिघात (Central Moments) अथवा माध्य के अपकिरण परिघात (Moments about the Arithmetic mean) कहा जाता है । शून्य से निकाले गये अपकिरण परिघात को Moments about zero origin कहा जाता है ।

परिघातों की गणना

(Calculation of Moments)

परिघातों की गणना निम्नलिखित रीतियों से की जाती है :

(i) प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)

(ii) लघु-रीति (Short-cut Method), तथा

(iii) पद विचलन रीति (Step Deviation Method) ।

(i) प्रत्यक्ष रीति-इस रीति से परिघातों की गणना करने के लिए निम्नलिखित प्रक्रियाएँ सम्पन्न की जाती हैं :

(i) सर्वप्रथम समंकामाला का समान्तर $\overline{X}$ ज्ञात किया जाता है ।

(ii) समंकमाला के प्रत्येक पद-मूल्य का समान्तर माध्य से विचलन $(d = x - \overline{X})$ ज्ञात किया जाता है ।

(iii) प्राप्त विचलनों के क्रमशः वर्ग (d^2), घन (d^3), चतुर्थ घात (d^4) आदि का मान ज्ञात कर लिया जाता है ।

(iv) व्यक्तिगत श्रेणी की स्थिति में विचलन-घातों के योग $(\Sigma d^1, \Sigma d^2, \Sigma d^3, \Sigma d^4$ या $\Sigma d^n)$ आदि ज्ञात कर लिये जाते हैं। आवृत्ति-श्रेणी की स्थिति में विचलन-घातों की उनसे संबंधित आवृतियों से गुणा करके गुणनफलों का योग $(\Sigma d^1, \Sigma d^2, \Sigma d^3, \Sigma d^4)$ आदि प्राप्त कर लिया जाता है ।

(v) अंत में निम्नलिखित सूत्रों के सहयोग से परिघातों का मान ज्ञात कर लिया जाता है ।

व्यक्तिगत श्रेणी	आवृति-श्रेणी
$\mu_1 = \frac{\Sigma d}{N}$	$\mu_1 = \frac{\Sigma fd}{N}$
$\mu_2 = \frac{\Sigma d^2}{N}$	$\mu_2 = \frac{\Sigma fd^2}{N}$
$\mu_3 = \frac{\Sigma d^3}{N}$	$\mu_3 = \frac{\Sigma fd^3}{N}$
$\mu_4 = \frac{\Sigma d^4}{N}$	$\mu_4 = \frac{\Sigma fd^4}{N}$

निम्नलिखित उदाहरणों से प्रत्यक्ष रीति से परिघात-गणना-प्रक्रिया को स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण-1

Calculate first four moments about mean by direct method :

Commodities :	A	B	C	D	E
Price per Kg (Rs.)	11	12	13	14	15

हल :

Calculation of four central moments.

Commodities	Price per kg. in Rs (X)	$(X-\overline{X})d/13$	d^2	d^3	d^4
A	11	−2	4	−8	16
B	12	−1	1	−1	1
C	13	0	0	0	0
D	14	1	1	1	1
E	15	2	4	8	16
N = 5	$\Sigma x = 65$	$\Sigma d = 0$	$\Sigma d^2 = 10$	$\Sigma d^3 = 0$	$\Sigma d^4 = 34$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{65}{5} = 13.$$

$$\mu_1 = \frac{\Sigma d}{N} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\mu_2 = \frac{\Sigma d^2}{N} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\mu_3 = \frac{\Sigma d^3}{N} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\mu^4 = \frac{\Sigma d^4}{N} = \frac{34}{5} = 6.8$$

उदाहरण-2

Find out the first moments about mean from the following :

Size :	2	4	6	8	10
Frequency :	5	2	5	4	4

हल :

Size (X)	f.	f.	$(x-\bar{x})$	fd	fd²	fd³	fd⁴
2	5	10	−4	−20	80	−320	1280
4	2	8	−2	− 4	8	− 16	32
6	5	30	0	0	0	0	0
8	4	32	2	8	16	32	64
10	4	40	4	16	64	256	1024
Total	$\Sigma f = 20$	$\Sigma fx = 120$	0	0	168	− 48	2400

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{120}{20} = 6$$

$$\mu_1 = \frac{\Sigma fd}{N} = \frac{0}{20} = 0$$

$$\mu_2 = \frac{\Sigma fd^2}{N} = \frac{168}{20} = 8.4$$

$$\mu_3 = \frac{\Sigma fd^3}{N} = \frac{-48}{20} = -2.4$$

$$\mu_4 = \frac{\Sigma fd^4}{N} = \frac{2400}{20} = 120$$

सतत श्रेणी में परिघात की गणना विधि को निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण-3

From the data given below caluclate the first four moments about the mean by direct method.

Size :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40
Frequency :	1	2	3	4

हल :

Calculation of moments.

Size	Midvalue (x)	f	fx	$(X-\overline{X})$ d/25	fd	fd^2	fd^3	fd^4
0 – 10	5	1	5	– 20	– 20	400	– 8000	160000
10 – 20	15	2	30	– 10	– 20	200	– 2000	20000
20 – 30	25	3	75	0	0	0	0	0
30 – 40	35	4	140	10	40	400	400	40000
Total		10	250	– 20	0	1000	– 6000	220000

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{250}{10} = 25$$

$$\mu_1 = \frac{\Sigma fd}{N} = \frac{0}{10} = 0$$

$$\mu_2 = \frac{\Sigma fd^2}{N} = \frac{1000}{10} = 100$$

$$\mu_3 = \frac{\Sigma fd^3}{N} = \frac{-6000}{10} = -600$$

$$\mu_4 = \frac{\Sigma fd^4}{N} = \frac{220000}{10} = 22000$$

(ii) लघु रीति-परिघात ज्ञात करने की इस रीति का उपयोग तब करना चाहिए जब समंकमाला का समान्तर माध्य पूर्णांक में नहीं आवे। इस रीति में समंकमाला के किसी पूर्णांक मूल को कल्पित समान्तर माध्स (A) मान लिया जाता है। इसी कल्पित माध्य से विचलन लिया जाता है। ऐसा करने से गणना क्रिया काफी सहज हो जाती है। इस रीति में परिघात गणना के लिए निम्नलिखित कार्य किये जाते हैं-

1. सर्वप्रथम किसी सुविधाजनक पूर्णांक मूल्य को कल्पित समान्तर माध्य (A) मान लिया जाता है।

2. इसी कल्पित माध्य से विभिन्न पद-मूल्यों के विचलन (dA=X–A) ज्ञात किये जाते हैं।

3. विचलन के वर्ग, धन तथा चतुर्थ घात ज्ञात करके उनका योग Σda, ΣdA^2, Σda^3 तथा Σda^4 ज्ञात कर लिया जाता है। आवृति श्रेणियों की दशा में विचलन-घातों को तत्सम्बन्धी को तत्सम्बन्धी आवृत्तियों से गुणा करके गुणनफलों का योग (ΣdA, ΣfdA^2, ΣfdA^3 तथा ΣfdA^4) ज्ञात कर लिया जाता है।

4. तत्पश्चात् निम्न सूत्रों का उपयोग करके परिघातों की गणना कर ली जाती है। किन्तु इस प्रकार प्राप्त परिघातों को कल्पित माध्य से निकाले गये परिघात (Moments about arbitary origin) कहा जाता है। इन्हें ग्रीक वर्णमाला के अक्षर (V) व्यु से दर्शाया जाता है, जैसे-V_1, V_2, V_3, V_4 आदि।

व्यक्तिगत श्रेणी

	व्यक्तिगत श्रेणी	आवृत्ति श्रेणी
First moment about arbitrary origin :	$V_1 = \frac{\Sigma dA}{N}$	$V_1 = \frac{\Sigma fdA}{N}$
Second moment about arbitrary origin :	$V_2 = \frac{\Sigma d^2A}{N}$	$V_2 = \frac{\Sigma fd^2A}{N}$
Third Moment about arbitrary origing :	$V_3 = \frac{\Sigma d^3A}{N}$	$V_3 = \frac{\Sigma fd^3A}{N}$
Fourth Moment about arbitrary origin :	$V_4 = \frac{\Sigma d^4A}{N}$	$V_4 = \frac{\Sigma fd^4A}{N}$

(5) अन्त में निम्नलिखित सूत्रों का उपयोग करके कल्पित माध्य से प्राप्त किए गए परिघातों (V_1, V_2, V_3, एवं V_4) को वास्तविक माध्य से प्राप्त परिघातों अर्थात् μ_1, μ_2, μ_3 एवं μ_4 में बदल लिया जाता है ।

$$\mu_1 = V_1 - V_1 = 0$$
$$\mu_2 = V_2 - V_1^2 = j^2$$
$$\mu_3 = V_3 - 3V_1 V_2 + 2V_1^3$$
$$\mu_4 = V_4 - 4V_1 V_3 + 6V_1^2 V_2 - 3V_1^4$$

निम्न उदाहरणों द्वारा व्यक्तिगत, खण्डित तथा सतत श्रेणियों में लघु रीति द्वारा परिघातों की गणना प्रक्रिया को स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण-4

Calculate first four moments about an arbitrary origin and convert them into moments about arithmetic mean

X : 30 25 25 40 32 28

हल :

X	dA/25	d^2A	d^3A	d^4A
30	+ 5	25	125	625
25	0	0	0	0
25	0	0	0	0
40	+ 15	225	3375	50625
32	+ 7	49	343	2401
28	+ 3	9	27	81
Total	30	308	3807	53732

$$V_1 = \frac{\Sigma dA}{N} = \frac{30}{60} = 5$$

$$V_2 = \frac{\Sigma d^2A}{N} = \frac{308}{6} = 51.33$$

$$V_3 = \frac{\Sigma d^3 A}{N} = \frac{3870}{6} = 645$$

$$V_4 = \frac{\Sigma d^4}{N} = \frac{53732}{6} = 8955.33$$

Calculation of μ from V :

$\mu_1 = V_1 - V_1$

$= 5 - 5 = 0$

$\mu_2 = V_2 - V_1^2$

$= 51.33 - (5)^2$

$= 51.33 - 25$

$= 26.33$

$\mu_3 = V_2 - 3V_1V_2 + 2V_1^3$

$= 645 - 3\,(5 \times 51.33) + 2\,(5^3)$

$= 645 - 3\,(256.65) + 2\,(125)$

$= 645 - 769\ 95 + 250$

$= 895 - 769.95$

$= 125.05$

$\mu_4 = V_4 - 4V_1\ V_3 + 6V_1^2\,V_2 - 3V_1^4$

$= 8955.33 - 4\,(5 \times 645) + 6\,(5^2 \times 51.33) - 3\,(5^4)$

$= 8955.33 - 4\,(3225) + 6\,(5^2 \times 51.33) - 3\,(5^4)$

$= 8955.33 - 12900 + 7699.5 - 1875$

$= 8955.33 + 7699.5 - (12900 + 1875)$

$= 16654.83 - 14775$

$= 1879.83$

खण्डित श्रेणी :

उदाहरण-5

Compute first four moments about mean by short-cut method taking 10 as assumed mean from the following data :

Size :	4	8	12	16	20
f :	2	2	1	4	1

हल :

Size (X)	f.	(X – A) dA/10	fdA	fd^2A	fd^3A	fd^4A	
4	2	– 6	– 12	+ 72	– 432	2592	
8	2	– 2	– 4	– 8	– 16	32	
12	1	+ 2	+ 2	+ 4	+ 8	16	
16	4	+ 6	+ 24	+144	+ 864	5184	
20	1	+ 10	+ 10	+100	+1000	10000	
Total	10	+ 10	+ 20	+328	+1425	+ 17824	

Moment about arbitrary origin :

$$V_1 = \frac{\Sigma fdA}{N} = \frac{20}{10} = 2$$

$$V_2 = \frac{\Sigma fd^2A}{N} = \frac{328}{10} = 32.8$$

$$V_3 = \frac{\Sigma fd^3A}{N} = \frac{1424}{10} = 142.4$$

$$V_4 = \frac{\Sigma fd^4A}{N} = \frac{17824}{10} = 1782.4$$

Calculation of μ from V

$$\mu_1 = V_1 - V_1 = 2 - 2 = 0$$

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= V_2 - V_1^2 \\
&= 32.8 - (2)^2 \\
&= 32.8 - 4 \\
&= 28.8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_3 &= V_3 - 3V_1\ V_2 + 2V_1^3 \\
&= 142.4 - 3(2 \times 32.8) + 2(2^3) \\
&= 142.4 - 3(65.6) + 2(8) \\
&= 142.4 - 196.8 + 16 \\
&= 158.4 - 196.8 \\
&= -38.4
\end{aligned}$$

$$\mu_4 = V_4 - 4V_1 V_3 + 6V_1^2 V_2 - 3V_1^4 f$$

$= 178.2 - 4(2 \times 142.4) + 6(2^2 \times 32.8) - 3(2)^4$
$= 1782.4 - 4(284.8) + 6(4 \times 32.8) - 3(16)$
$= 1782.4 - 1139.2 + 787.2 - 48$
$= 1782.4 + 787.2 - (1139.2 + 48)$
$= 2569.6 - 1187.2$
$= 1382.4$

सतत श्रेणी

सतत श्रेणी में लघु रीति से परिघातों की गणना की क्रियाविधि को निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण-6

Compute the first four moments from the following data by short-cut method :

Class :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
Frequency :	1	2	10	5	2

हल :

Class	M. V.	f.	dA/25	f.dA	fd²A	fd³A	fd⁴A	
0 – 10	5	1	–20	–20	400	–8000	160000	
10 – 20	15	2	–10	–20	200	–2000	20000	
20 – 30	25	10	0	0	0	0	0	
30 – 40	35	5	10	50	500	5000	50000	
40 – 50	45	2	20	40	800	16000	320000	
Total		20	0	50	1900	11000	550000	

माना कि काल्पनिक माध्य = 25.

Moment about arbitrary origin :

$$V_1 = \frac{\Sigma fdA}{N} = \frac{50}{20} = 2.5$$

$$V_2 = \frac{\Sigma fd^2A}{N} = \frac{1900}{20} = 95$$

$$V_3 = \frac{\Sigma fd^3A}{N} = \frac{11000}{20} = 550$$

$$V_4 = \frac{\Sigma fd^4A}{N} = \frac{550000}{20} = 27500$$

$\mu_1 = v_1 - v_1 = 2.5 - 2.5 = 0$

$\mu_2 = v_2 - V_1^2$

$= 95 - (2.5)^2$

$= 95 - 6.25$

$= 88.75$

$\mu_3 = v_3 - 3v_1 \; v_2 + 2v_1^3$

$= 550 - 3(2.5 \times 95) + 2(2.5)^2$

$= 550 - 3(237.5)\, 2\, (15.625)$

$= 550 - 712.5 + 31.25$

$= 581.25 - 712.5$

$= -131.25$

$\mu_4 = v_4 - 4V_1\, V_3 + 6v_1^2 - 3v_1^4$

$= 27500 - 4(2.5 \times 550) + 6(2.5^2 \times 95) - 3(2.5)^4$

$= 2750 - 4(1375) + (1375) + 6\,(593.75) - 3\,(39.0025)$

$= 2750 - 5500 + 3562.50 - 117.1875$

$= 31062.5 - 5617.1875$

$= 25445.313$

पद विचलन रीति-पद विचलन रीति परिघात-गणन की एक सरल रीति है । किन्तु इसका उपयोग केवल समान वर्गान्तर वाली सतत श्रेणी में ही किया जा सकता है । यह रीति भी लघु रीति के ही समान है । इसमें काल्पनिक माध्य से लिये गये विचलनों को वर्ग अन्तराल (i) से भाग देकर उन्हें संक्षिप्त कर लिया जाता है । इस रीति से परिघातों की गणना के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया पूर्ण की जाती है :

1. किसी कल्पित माध्य (A) से विभिन्न पद-मानों के विचलन (dA) ज्ञात किये जाते हैं ।
2. विचलनों को वर्ग अन्तराल (i) से भाग देकर (d'A) ज्ञात कर लिये जाते हैं ।
3. कल्पित मूल बिन्दु से ज्ञात विचलनों के आधार पर चारों परिघात ($v'_1 \; v'_2 \; v'_3$ तथा v'_4)ज्ञात किये जाते हैं ।
4. अन्त में निम्न सूत्रों का उपयोग करके वास्तविक माध्य पर आधारित परिघातों (μ_1, μ_2, μ_3 तथा v'_4) का मान ज्ञात कर लिया जाता है :

$\mu_1 = (v'_1 - v'_1) \times i = 0$

$\mu_1 = (v'_2 - v'_1) \times i^2$

$\mu_3 = (v'_3 - 3v'_1\, v'_1{}^{'3}) \times i^3$

$\mu_4 = (v'_4 - 4v'_3\, v_1{}^{'2} + 6v'_2\, v_1{}^{'2} - 3v_1{}^{'4}) \times i^4$

निम्न उदाहरण के द्वारा पद विचलन रीति के उपयोग को स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण-7

उदाहरण 6 में दिये गये वितरण से पद विचलन रीति का उपयोग करके चारों परिघातों को ज्ञात कीजिये ।

हल :

Class	f.	M.V.	dA/25	d'A/25	d'A/i=10	f.d'A	f.d'A	f.d'A⁴
0 – 10	1	5	– 20	– 2	– 2	4	– 8	16
10 – 20	2	15	– 10	– 1	– 2	2	– 2	2
20 – 30	10	25	0	0	0	0	0	0
30 – 40	5	35	10	1	5	5	5	5
40 – 50	2	45	20	2	4	8	16	32
Total	20		0	0	5	19	11	55

$$v'_1 = \frac{\Sigma fd' A}{N} = \frac{5}{20} = 0.25$$

$$v'_2 = \frac{\Sigma fd' A^2}{N} = \frac{19}{20} = 0.95$$

$$v'_3 = \frac{\Sigma fd' A^3}{N} = \frac{11}{20} = 0.55$$

$$v'_4 = \frac{fd' A^4}{N} = \frac{55}{20} = 2.75$$

First four moments from actual mean :

$$\mu_1 = (v'_1 - v'_1) \times i$$

$$= (0.25 - 0.25) \times 10$$

$$= 0 \times 10 = 0$$

$$\mu_2 = (v'_2 - v'^2_1) \times i^2$$

$$= [0.95 - (0.25)^2] \times 10^2$$

$$= [0.95 - 0.0625] \times 10^2$$

$$= 0.8875 \times 100$$

$$= 88.75$$

$$\mu_3 = [v'_3 - 3v'_2 v'_1 + 2v'^3_1] \times i^3$$

$$= [0.55 - 3\,(.95 \times .25) + 2\,(.25)^3] \times 10^3$$

$= [0.55 - 0.7125 + 0.03125] \times 1000$

$= [0.58125 - 0.7125] \times 1000$

$= -0.13125 \times 1000 = -131.25000 \text{ or } 131.25$

$\mu_4 = [v'_4 - 4v'_1 v'_3 + 6v'^2_1 v'_2 - 3v'^4_1] \times i^4$

$= [2.75 - 4(.25 \times .55) + 6\,(.25^2 \times .95) - 3(.25)^4]\,10^4$

$= [2.75 - 4(0.1375)\,6\,(0.0625 \times .95) - 3.00390625] \times 10000$

$= [2.75 - .25 + 0.35625 - .01171875] \times 10000$

$= [3.10625 - .56171875] \times 10000$

$= [2.54453125 \times 10000]$

$= 25445.31250000 \text{ or } 25445.3125$

शेपर्ड संशोधन
(Sheppard's Correction)

सतत श्रेणी में परिघात ज्ञात करते समय हम यह मान लेते हैं कि प्रत्येक वर्गांतर की आवृत्तियाँ उसके मध्य बिन्दु पर ही एकत्रित हैं । किन्तु ऐसा मानना सदा ठीक नहीं होता । हमारी इस मान्यता के कारण गणना के क्रम में परिघातों के मान में कुछ विभ्रम उत्पन्न हो जाते हैं । इन विभ्रमों को दूर करने के लिए श्री डब्ल्यु० एफ० शेपर्ड ने कुछ सूत्रों का प्रतिपादन किया है जिनके उपयोग से विभ्रमों को समायोजित किया जाता है । इन समायोजनों को शेपर्ड के संशोधन कहा जाता है । शेपर्ड के संशोधन की आवश्यकता केवल द्वितीय एवं चतुर्थ परिघातों में ही होती है । प्रथम तथा तृतीय परिघातों में संशोधन की कोई आवश्यकता नहीं होती क्योंकि इनमें विचलनों के धनात्मक एवं ऋणात्मक चिह्न बने रहते हैं । ऐसी स्थिति में उत्पन्न अशुद्धि अपने क्षतिपूरक स्वभाव के कारण स्वतः समाप्त हो जाती है । द्वितीय तथा चतुर्थ परिघातों में विचलनों का वर्ग तथा चौथा घात सदा धनात्मक होता है । इससे अशुद्धि संचयी प्रकृति की हो जाती है । शेपर्ड के समायोजन सूत्र निम्नलिखित हैं :

$$\text{Corrected }(\mu_2) = \mu_2 - \frac{i^2}{I^2}$$

$$\text{Corrected }(\mu_4) = \mu_4 - \frac{1}{2}.\ \mu_2,\ i^2 + \frac{7}{240} \times i^4$$

शेपर्ड संशोधन को निम्नलिखित परिस्थितियों में ही लागू करना चाहिए :

(i) चर-राशि सतत (Continuous) हो ।

(ii) जब कुल आवृत्तियों की संख्या 1000 से कम हो ।

(iii) जब वर्गान्तर समान हों ।

आदर्श प्रश्न

(Model Question)

1. सांख्यिकीय मापों के संदर्भ में परिघातों का आशय स्पष्ट करें तथा इनकी गणना विधि को संक्षेप में लिखें ।

2. Calculate first four moments about the mean from the following :

X	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f	:	1	6	13	25	30	22	9	5	2

3. Find out first four moments about the arbitrary origing and give the moments about mean using Sheppard's correction.

Class :	0 – 20	10 – 20	20 – 30	30 – 40
f :	1	3	4	2

4. निम्न समंकों से प्रथम परिघातों की गणना करें ।

16 17 18 19 20

5. The four moments about the arbitrary mean are given below :—

$v_1 = 0.2$, $v_2 = 5.2$ $v_3 = 0.8$ तथा v_4 59.2

●

पाठ-22

सह-सम्बन्ध

(Correlation)

प्रिय छात्रो,

आपने तो सुना ही होगा कि ज्यों-ज्यों सरकार चलन में मुद्रा की मात्रा बढ़ाती जाती है, त्यों-त्यों मुद्रा के मूल्य में कमी होती जाती है अर्थात् मूल्य स्तर बढ़ता जाता है । आपने यह भी अनुभव किया होगा कि वर्षा की मात्रा में वृद्धि होने से कृषि उत्पादन में भी वृद्धि होती है । अगर वर्षा की मात्रा एक सीमा से अधिक बढ़ जाय (अतिवृष्टि) तो कृषि उत्पादन में कमी भी हो जाती है । इस प्रकार अनेकों तथ्य-युग्मों का उदाहरण दिया जा सकता है जिनके बीच किसी न किसी प्रकार का सम्बन्ध विद्यमान होता है । ऐसे तथ्यों से संबंधित समंक यदि एकत्र किये जायें तो हम पाते हैं कि एक श्रेणी में परिवर्तन होने पर दूसरे तथ्य से संबंधित श्रेणी के मूल्यों में भी परिवर्तन हो जाता है । वास्तव में होता यह है कि प्रथम श्रेणी में परिवर्तन हो जाता है । दूसरे शब्दों में ऐसा कहा जा सकता है कि द्वितीय तथ्य का मूल्य क्या होगा यह उसके समकक्ष प्रथम तथ्य के मूल्य में होने वाले परिवर्तन पर निर्भर करता है । ऐसे प्रथम तथ्य को स्वतन्त्र चर (Independent Variable) तथा द्वितीय तथ्य को आश्रित चर (Dependent Variable) कहा जाता है । इनके बीच पाये जाने वाले सम्बन्ध को कार्य-कारण सम्बन्ध (Causal relationship) तथा दोनों चरों को सह-संबंधित चर कहते हैं । इस प्रकार किन्हीं दो तथ्यों के बीच कार्य-कारण सम्बन्ध की उपस्थिति उनके सह-संबंधित होने की एक महत्वपूर्ण शर्त होती है । कभी-कभी दो चरों में परिवर्तन हमें स्पष्टत: दिखाई पड़ता है किन्तु कार्य-कारण सम्बन्ध के अभाव में उन्हें-संबंधित तथ्य नहीं माना जा सकता । उदाहरण के तौर पर गत सात वर्षों में भारत में वर्षा की मात्रा तथा नेपाल में चावल के उत्पादन की मात्रा से संबंधित समंक यदि निम्न प्रकार रहे हैं-

वर्ष	भारत में वर्षा की मात्रा (से. मी. में)	नेपाल में चावल का उत्पादन (लाख टन में)
1985	30	50
1986	45	60
1987	70	75
1988	100	90
1989	130	140
1990	135	160
1991	138	165

उपर्युक्त समंकों को देखने से स्पष्ट तौर पर जाहिर होता है कि वर्षा की मात्रा में जैसे-जैसे वृद्धि (परिवर्तन) हो रही है वैसे-वैसे चावल के उत्पादन में वृद्धि (परिवर्तन) हो रही है । अत: ऊपरी तौर पर ये दोनों तथ्य सह-संबंधित लगते हैं । लेकिन ऐसा कहना उचित नहीं है क्योंकि इनके बीच कार्य-कारण संबन्ध का अभाव है । भारत में वर्षा की मात्रा में होने वाली कमी या वृद्धि का कोई प्रभाव नेपाल में चावल के उत्पादन पर नहीं पड़ता । नेपाल में चावल के उत्पादन में होने वाला परिवर्तन अन्य कारणों से प्रभावित होगा । अत: दो तथ्यों में दिखने वाला सह-परिवर्तन मात्र ही उनके बीच सह-संबन्ध की उपस्थिति का परिचायक नहीं हो सकता । ऐसा परिवर्तन आकस्मिक या दैवयोग से भी सम्भव हो सकता है ।

सह-सम्बन्ध की परिभाषा

(Definition of Correlation)

प्रो० डब्लू० आई० किंग के अनुसार "यदि यह सत्य प्रमाणित हो जाय कि अधिकांश उदाहरणों में दो चर हमेशा एक ही दिशा में या परस्पर विपरीत दिशा में घटते-बढ़ते रहने की प्रवृत्ति रखते हैं तो ऐसी स्थिति में हम समझते हैं कि उनके बीच एक निश्चित संबन्ध है । यही संबंन्ध सह-संबन्ध कहलाता है । "If it is proved true that in a large number of instances two variables tend always to fluctuate in the same or opposite direction, we consider that the fact is established and the ralationship exists. The relationship is called correlation."

प्रो० एल० आर० कॉनर (Conner) के शब्दों में "जब दो या अधिक राशियाँ सहानुभूति में परिवर्तित होती हैं, जिससे एक में होने वाले परिवर्तनों के फलस्वरूप दूसरी राशि में भी परिवर्तन होने की प्रवत्ति पायी जाती है, तो वे राशियाँ सह-संबन्धित कहलाती हैं "If two or more quantitites vary in sympathy so that movements in one tend to be accompained by corresponding movements in the other (s) then they are said to be correlated."

उपर्युक्त परिभाषाओं के अध्ययन से स्पष्ट है कि जब दो तथ्यों की ऐसी स्थिति हो कि एक के मूल्यों में हुए परिवर्तन की सहानुभूति में दूसरे के मूल्यों में परिवर्तन हो जाय तो ऐसे तथ्यों को सह-संबन्धित तथ्य कहते हैं और उनके बीच पाये जाने वाले संबन्ध को सह-संबन्ध। दोनों तथ्यों के मूल्यों में होने वाला परितर्वन एक ही दिशा में या एक दूसरे के विपरीत दिशा में हो सकता है ।

किन्हीं तथ्यों के बीच सह-संबन्ध की विद्यमानता का ठीक-ठीक पता लगाने के लिए बड़े गहन विश्लेषण की आवश्यकता होती है । पिछले उदाहरण में देख चुके हैं कि मात्र सह-परिवर्तन ही सह-संबन्ध की उपस्थिति का अन्तिम प्रमाण नहीं है । उसी प्रकार कार्य-कारण संबन्ध के उपस्थित होने से सह-सबन्ध तो निश्चित विद्यमान रहता है किन्तु अगर दो तथ्य सह-संबन्धित हैं तो यह उनके बीच कार्य संबन्ध की उपस्थिति का सदा सूचक नहीं हो सकता । अत: सह-संबन्ध निम्नलिखित में से एक अथवा अधिक कारणों से स्थापित हो सकता है–

(1) दोनों श्रेणियों में कार्य-कारण संबन्ध होने पर

(2) दोनों श्रेणियों में सह-संबन्ध किसी तीसरे सामान्य कारण से भी हो सकता है जैसे आय की अधिकता के कारण लोग कार भी रखें तथा दूरदर्शन भी अर्थात् कार तथा दूरदर्शन रखने में संबन्ध ।

(3) दोनों चरों में एक-दूसरे के कारण परिवर्तन हो जैसे शिक्षा पर व्यय तथा प्रति व्यक्ति आय में संबन्ध ।

डा० वाडिंगट्न ने तो यहाँ तक कहा है कि "यदि सारे प्रमाण यह संकेत करते हैं कि (दोनों श्रेणियों में) कुछ संबन्ध पाया जाता है और पाया जा सकता है तो भी इन प्रमाणों की बड़ी सावधानी से जाँच करनी चाहिए ।"

सह-सम्बन्ध का महत्व

(Importance of Correlation)

सांख्यिकीय अध्ययन में सह-संबन्ध के सिद्धान्त का महत्व बहुत अधिक है । इस सिद्धान्त को विकसित करने का श्रेय फ्रांसिस गाल्टन तथा कार्ल पियर्सन महोदय को है । सह-संबन्ध के सिद्धान्त की मदद से दो या दो से अधिक चरों के बीच संबन्ध को स्पष्ट किया जा सकता है । सह-संबन्ध की दिशा तथा मात्रा का पता लगाया जा सकता है । इसी के आधार पर अर्थशास्त्र व अन्य सामाजिक या प्राकृतिक विज्ञानों के अनेक नियमों का प्रतिपादन किया गया है जैसे माँग एवं पूर्ति का नियम । प्रतीगमन (Regression), विचरण अनुपात (Ratio of variation) आदि की धारणाएँ तो सह-संबन्ध के सिद्धान्त पर ही आधारित हैं । इनकी सहायता से संबन्धित चरों में एक के किसी निश्चित मूल्य के लिए दूसरे के सम्भावित मूल्य का अनुमान लगाया जाता है । टिपेट महोदय का कहना है कि "सह-संबन्ध का प्रभाव हमारी भविष्यवाणी की अनिश्चितता के विस्तार को कम करता है ।" (The effect of the correlation is to reduce the range of uncertainty of our prediction.") अतः व्यावहारिक जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में जहाँ दो या दो से अधिक संबंधित घटनाओं के पारस्परिक संबन्ध का विवेचन करना हो, सह-संबन्ध का सिद्धान्त बहुत उपयोगी सिद्ध होता है ।

सह-सम्बध के प्रकार

(Types of Correlation)

संबन्धित चरों में परिवर्तन की दिशा, अनुपात तथा समंकमालाओं की संख्या के आधार पर सह-संबन्ध को निम्न वर्गों में बांटा जा सकता है-

(1) **धनात्मक सह-सम्बन्ध** (Positive correlation)—जब दो तथ्यों के मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों की दिशा समान हो तब उनके बीच पाये जाने वाले सह-संबन्ध को धनात्मक सह-संबन्ध कहा जाता है जैसे किसी वस्तु की मांग और उसकी पूर्ति । हम देखते हैं कि जैसे-जैसे किसी वस्तु की माँग बढ़ती जाती है वैसे-वैसे उसकी पूर्ति भी बढ़ने लगती है ।

(2) **ऋणात्मक सह-सम्बन्ध** (Negative Correlation)—जब दो चरों के मानों में होने वाले परिवर्तनों की दिशा एक दूसरे के विपरीत हो तब उनके बीच पाये जाने वाले सह-संबन्ध को ऋणात्मक सह-संबन्ध कहा जाता है जैसे किसी वस्तु की पूर्ति और उसका मूल्य । हम देखते हैं कि वस्तु की पूर्ति बढ़ने से उसका मूल्य कम होने लगता है तथा पूर्ति में कमी के साथ उसके मूल्य में वृद्धि प्रारम्भ हो जाती है ।

(3) **रेखीय सह-सम्बन्ध** (Linear Correlation)—यदि प्रथम तथ्य के मूल्य में एक निश्चित दर से परिवर्तन हो तथा उसके परिणामस्वरूप दूसरे तथ्य के मूल्य में भी उसी निश्चित दर से परिवर्तन हो अथवा किसी अन्य किन्तु स्थिर दर में परिवर्तन हो तब दोनों के बीच पाया जाने वाला सह-संबन्ध रेखीय सह-संबन्ध कहलाता है । ऐसे तथ्यों को बिन्दु रेखीय पत्र पर अंकित करने पर प्राप्त वक्र एक सरल रेखा के समान होती है । उदाहरण के लिए अगर प्रथम तथ्य के मूल्य में 20% की वृद्धि हो रही हो और दूसरे तथ्य के मूल्य में भी 20% की वृद्धि या कमी हो रही हो अथवा दूसरे तथ्य के मूल्य में भिन्न 15% की स्थायी वृद्धि हो रही हो तो ऐसे सह-संबन्ध को रेखीय सह-संबन्ध कहा जायेगा ।

(4) **वक्र रेखीय सह-सम्बन्ध** (Curvi-linear correlation)—जब दो तथ्यों के मूल्यों के बीच होने वाले परिवर्तनों का अनुपात निश्चित नहीं हो अर्थात प्रथम तथ्य में 10% से वृद्धि हो और इसकी सहानुभूति में दूसरे तथ्य के मूल्य में कभी 3% तो कभी 20% तो कभी 5% आदि भिन्न-भिन्न दरों से वृद्धि व कमी हो तो इनके बीच पाये जाने वाले सह-सम्बन्ध को वक्र रेखीय कहा जाता है । ऐसे समंकों को बिन्दु रेखीय पत्र पर अंकित करने से वक्र रेखा प्राप्त होती है ।

(5) **सरल सह-सम्बन्ध** (Simple correlation)—दो चर मूल्यों के बीच पाये जाने वाले सह-सम्बन्ध को सरल सह-सम्बन्ध कहा जाता है । इन दो चर-मूल्यों में एक कारण अथवा स्वतन्त्र चर होता है तथा दूसरा परिणाम अथवा आश्रित चर होता है ।

(6) **बहुगुणी सह-सम्बन्ध** (Multiple correlation)—बहुगुणी सह-सम्बन्ध में समंकमालाओं की संख्या दो से अधिक होती है । इनमें स्वतन्त्र चर मालाओं की संख्या दो या दो से अधिक रहती है तथा आश्रित चर माला की संख्या एक होती है और उन सभी स्वतन्त्र चर मालाओं का सम्मिलित प्रभाव आश्रित चर माला पर पड़ता है ।

(7) **आंशिक सह-सम्बन्ध** (Partial correlation)—आंशिक सह-सम्बन्ध की स्थिति में भी समंकमालाओं की संख्या दो से अधिक होती है किन्तु एक समय में किन्हीं दो के बीच के सम्बन्ध का ही अध्ययन किया जाता है अन्य चरों के प्रभाव को स्थिर कर दिया जाता है । उदाहरण के लिए, यदि वर्षा और खाद दोनों के गेहूँ की उपज पर सामूहिक प्रभाव का अध्ययन किया जाय तो उसे बहुगुनी सह-सम्बन्ध कहेंगे किन्तु वर्षा की एक स्थिर मात्रा के लिए खाद की मात्रा एवं गेहूँ की पैदावार के बीच के सम्बन्ध का अध्ययन किया जाय तो उसे आंशिक सह-सम्बन्ध कहा जायेगा ।

सह-सम्बन्ध की मात्रा

(Degree of Correlation)

दो या दो तथ्यों के बीच पाये जाने वाले सह-सम्बन्ध की अधिकतम मात्रा इकाई अर्थात् एक मानी गयी है । ऊपर हम इस बात की चर्चा कर चुके हैं कि परिवर्तन की दिशा, अनुपात तथा समंकमालाओं की संख्या के आधार पर सह-सम्बन्ध के विभिन्न प्रकार होते है । उसी प्रकार सह-सम्बन्ध की मात्रा के आधार पर भी सह-सम्बन्ध को विभिन्न वर्गों में बाँटा जाता है जो निम्नलिखित हैं-

(1) **धनात्मक पूर्ण सह-सम्बन्ध** (Perfect Positive Correlation)—जब दो चरों के मूल्यों में होने वाले परिवर्तन की दिशा एवं परिवर्तन के अनुपात दोनों समान हो तो उनके बीच के सह-सम्बन्ध को पूर्ण धनात्मक सह-सम्बन्ध कहा जाता है । ऐसी स्थिति में सह-सम्बन्ध गुणांक सदा + 1 के बराबर आता है । इसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है-

दैनिक आय	दैनिक बचत
Rs.	Rs.
5	2
10	4
15	6
20	8
25	10

ऊपर के उदाहरण में हम पाते हैं कि व्यक्ति की आय और उसकी बचत दोनों में वृद्धि हो रही है अर्थात् दोनों चरों में परिवर्तन की दिशा समान है । हम यह भी देख रहे हैं कि आय में 5 रु० की दर से वृद्धि हो रही है । इसके परिणामस्वरूप बचत में होने वाली वृद्धि भी एक निश्चित मात्रा में हो रही है । बचत में 2 रु० की दर से वृद्धि हो रही है । अत: यहाँ परिवर्तन के अनुपात भी दोनों चरों में समान है ।

(2) **ऋणात्मक पूर्ण सह-सम्बन्ध** (Negative Perfect Correlation)—यदि दो चरों में परिवर्तन का अनुपात समान हो किन्तु परिवर्तन की दिशा एक दूसरे के विपरीत हो तब उनके बीच पाया जाने वाला सह-सम्बन्ध पूर्ण तो होगा लेकिन वह ऋणात्मक होगा । उसे ऋणात्मक पूर्ण सह-सम्बन्ध कहा जायेगा । ऋणात्मक पूर्ण सह-सम्बन्ध गुणांक की मात्रा सदैव- 1 के बराबर होती है । उदाहरण के लिए किसी नगर में चिकित्सकों की संख्या तथा रोग से मरने वालों की संख्या निम्न प्रकार है-

चिकित्सकों की संख्या	रोग से मरने वालों की संख्या
Rs.	Rs.
2	14
4	12
6	10
8	8
10	6

ऊपर के समंकों से स्पष्ट है कि चिकित्सकों की संख्या में वृद्धि हो रही है और मृतकों की संख्या में कमी हो रही है अर्थात् दोनों चरों में परिवर्तन की दिशा विपरीत है । किन्तु दोनों में परिवर्तन का अनुपात समान है । एक में दो की दर से वृद्धि हो रही है तो दूसरे में 2 की ही दर से कमी हो रही है ।

(3) **शून्य सह-सम्बन्ध** (Zero Correlation)–जब किन्हीं दो चरों के बीच परिवर्तन किसी मान्य कारण से नहीं बल्कि संयोगवश हो रहा हो तो वहाँ सह-सम्बन्ध का अभाव पाया जाता है । ऐसी स्थिति में सह-सम्बन्ध गुणांक सदा शून्य (0) होता है ।

(4) **सीमित मात्रा का सह-सम्बन्ध** (Limited Degree of Correlation)–ऊपर हमलोग देख चुके हैं कि सह-संबंध की एक स्थिति पूर्ण सह-सम्बन्ध की हो सकती है तो दूसरी शून्य सह-सम्बन्ध की । ये दोनों ही स्थितियाँ सह-सम्बन्ध की चरम स्थिति को बताती हैं । इन्हीं दोनों अर्थात् पूर्ण सह-सम्बन्ध और शून्य सह-सम्बन्ध की चरम सीमित के मध्य की स्थिति को सीमित मात्रा का सह-सम्बन्ध (Limited Degree of Correlation) कहा जाता है । दो चरों के बीच पूर्ण सह-सम्बन्ध होने का तात्पर्य यह है कि उनके बीच सह-सम्बन्ध का अभाव तो नहीं है लेकिन उनके बीच पूर्ण सह-सम्बन्ध भी नहीं है । ऐसी स्थिति में सह-सम्बन्ध होने का तात्पर्य गुणांक शून्य से अधिक किन्तु एक से कम होता है । सीमित मात्रा का सह-सम्बन्ध भी धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है । अध्ययन की सुविधा के लिए सीमित मात्रा के सह-सम्बन्ध को उसकी मात्रा के आधार पर निम्न वर्गों में बाँटा जा सकता है-

(A) **उच्च स्तरीय सह-सम्बन्ध** (High Degree Correlation)–जब दो चरों के बीच पाया जाने वाला सह-सम्बन्ध गुणांक $\pm .75$ या इससे अधिक हो लेकिन ± 1 से कम हो तो उसे उच्च स्तरीय सह-सम्बन्ध कहा जाता है । ऐसी स्थिति में सह-सम्बन्ध गुणांक $\pm .75$ से ± 1 के बीच कोई भी मान हो सकता है ।

(B) **मध्यम स्तरीय सह-सम्बन्ध** (Moderate Degree of Correlation)–मध्य-स्तरीय सह-सम्बन्ध की स्थिति में दो चरों के बीच पाया जाने वाला सह-सम्बन्ध गुणांक ± 0.25 से लेकर ± 0.75 के बीच ही रहता है । दूसरे शब्दों में सह-सम्बन्ध गुणांक ± 0.25 या उससे अधिक लेकिन ± 0.75 से कम कुछ भी हो सकता है ।

(C) **निम्नस्तरीय सह-सम्बन्ध** (Low Degree Correlation)–निम्नस्तरीय सह-सम्बन्ध से आशय यह है कि सह-सम्बन्ध तो उपस्थित है लेकिन वह मध्यम स्तरीय सह-सम्बन्ध से कम है । ऐसी स्थिति में सह-सम्बन्ध गुणांक शून्य (0) से अधिक किन्तु ± 0.25 से कम कुछ भी हो सकता है ।

सह-सम्बन्ध की विभिन्न मात्राओं एवं नामों को निम्न तालिका द्वारा आप अधिक सरलता से समझ सकते हैं-

सह-सम्बंध की मात्रा	सह-सम्बंध का प्रकार
(i) + 1	पूर्ण धनात्मक सह-सम्बन्ध
(ii) - 1	पूर्ण ऋणात्मक सह-सम्बन्ध
(iii) +0.75 से +1 के मध्य	उच्चस्तरीय धनात्मक सह-सम्बन्ध
(iv) – 0.75 से - 1 के मध्य	उच्चस्तरीय ऋणात्मक सह-सम्बन्ध

(v)	+0.25 से + 0.75 के माध्य	मध्यस्तरीय धनात्मक सह-सम्बन्ध
(vi)	− 0.25 से −0.75 के मध्य	मध्यस्तरीय ऋणात्मक सह-सम्बन्ध
(vii)	0 से अधिक किन्तु 0.25 से कम	निम्नस्तरीय धनात्मक सह-सम्बन्ध
(viii)	0 से कम किन्तु − 0.25 से अधिक	निम्नस्तरीय ऋणात्मक सह-सम्बन्ध
(ix)	शून्य (0)	सह-सम्बन्ध का अभाव

आदर्श प्रश्न

(Model Questions)

1. सह-सम्ब्रन्ध का अर्थ बतावें और इसके विभिन्न प्रकारों को संक्षेप में वर्णन करें ।
2. सह-सम्बन्ध के महत्व की चर्चा करें तथा धनात्मक एवं ऋणात्मक सह-सम्बन्ध में अन्तर उदाहरण द्वारा स्पष्ट करें ।

●

पाठ-23

सह-सम्बन्ध की गणना (प्रथम)

(Calculation of Correlation I)

प्रिय छात्रो,

गत पाठ में हमलोग सह-सम्बन्ध का अर्थ, उसके विभिन्न प्रकार तथा उसकी विभिन्न मात्राओं की चर्चा विस्तृत रूप में कर चुके हैं । अब इस पाठ में सह-संबन्ध ज्ञात करने की विभिन्न विधियों की चर्चा की जायेगी ।

सह-संबंध की गणना निम्नलिखित विधियों के उपयोग से की जाती है-

(1) विक्षेप चित्र या बिन्दु विधि (Scatter-Diagram or Dot Diagram Method)

(2) बिन्दु रेखीय विधि (Graphic Method)

(3) संगामी विचलन गुणांक (Coefficient of Concurrent Deviation)

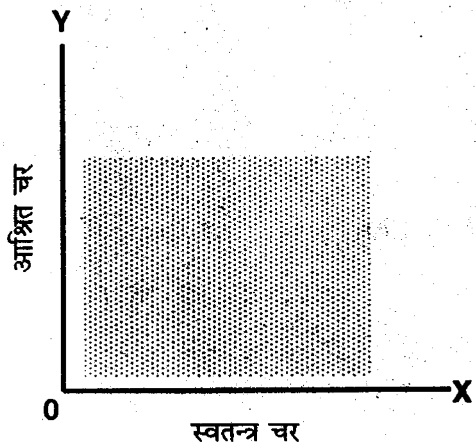
(4) कार्ल-पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक (Karl Person's Coefficient of Correlation)

(5) स्पीयरमैन की कोटि अन्तर विधि (Spearman's Rank-Difference Method)

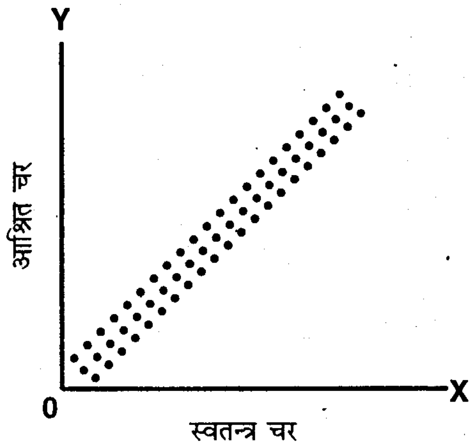
(1) विक्षेप चित्र या बिन्दु या चित्र विधि-दो समंकमालाओं के बीच के सह-सम्बन्ध का अनुमान लगाने की यह एक सरल विधि हैं । इसमें दोनों समंकमालाओं के चरों को बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित कर दिया जाता है तथा प्रांकित बिन्दुओं की स्थिति एवं जमाव को देखकर सह-सम्बन्ध का अनुमान लगाया जाता है ।

स्वतन्त्र चर के मूल्यों को भुजाक्ष (OX) पर तथा आश्रित चर के मूल्यों को कोटि-अक्ष (OY) पर दिखाया जाता है । इस प्रकार बिन्दुरेखीय पत्र पर उतने ही बिन्दु प्राप्त हो जाते हैं जितने दोनामें समंकमालाओं में चर युग्म होते हैं । बिन्दुओं का यह समूह अनेक रूपों में बिखरा हुआ हो सकता है । इन विभिन्न रूपों के आधार पर ही सह-सम्बन्ध की दिशा व मात्रा का अनुमान लगाया जाता है । विक्षेप चित्रों के अध्ययन के लिए निम्न रीतियाँ व्यवहार में लायी जाती हैं-

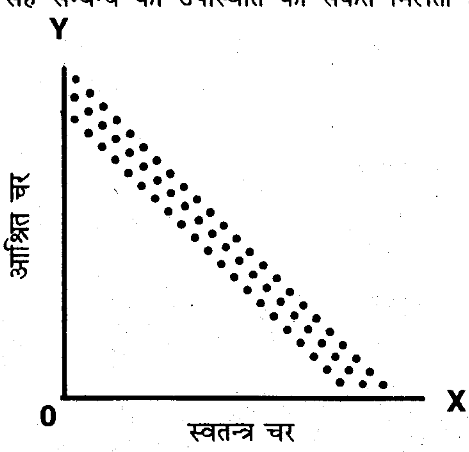
(1)यदि बिन्दु रेखीय पत्र पर प्रांकित बिन्दुओं की कोई निश्चित दिशा नहीं हो, वे तितर-बितर ढंग से बिखरे हुए हों तो इससे दोनों चरों के बीच सह-सम्बन्ध का अभाव स्पष्ट होता है । इसे निम्न चित्र द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है-



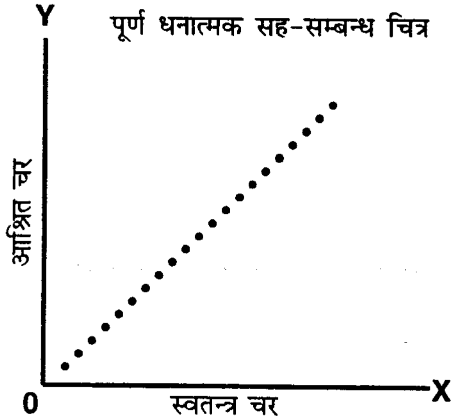
(2) यदि बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित बिन्दुओं के समूह से उनकी एक निश्चित दिशा में धारा के समान प्रवाहित होने की प्रवृत्ति प्रकट होती है तो इससे दोनों में सह-सम्बन्ध की उपस्थिति की सूचना मिलती है । बिन्दुओं की यह धारा यदि निचले बायें कोने से क्रमशः ऊपर दाहिने कोने की ओर उठती हुई हो तो धनात्मक सह-सम्बन्ध होता है । इसे निम्न चित्र द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है–



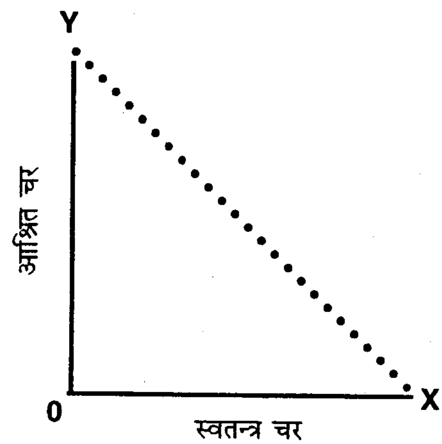
उपर्युक्त के विपरीत यदि बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित बिन्दुओं का समूह ऊपर बायें कोने से क्रमशः निचले दायें कोने की ओर बढ़ता हुआ हो तो इससे ऋणात्मक सह-सम्बन्ध की उपस्थिति का संकेत मिलता है । इसे निम्न चित्र द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है-



(3) यदि बायीं ओर के निचले कोने से दायीं ओर के ऊपरी कोने तक सभी बिन्दु एक सीधी रेखा के रूप में स्थित हों तो इससे पूर्ण धनात्मक सह-सम्बन्ध की उपस्थिति का बोध होता है । इसे निम्न चित्र द्वारा दिखाया जाता है-



(4) यदि बायीं ओर के ऊपर वाले कोने से प्रारम्भ होकर बिन्दुओं का समूह दायीं ओर के निचले कोने तक एक सीधी रेखा में जमा हो जाता है तो इससे पूर्ण ऋणात्मक सह-सम्बन्ध की उपस्थिति का बोध होता है । इसे निम्न चित्र द्वारा दिखाया जा सकता है-



(5) यदि प्रांकित बिदुओं के समूह के बीच से एक सरल रेखा खींच दी जाय ते विक्षेप चित्र के बिन्दु इस रेखा के जितनी निकट होंगे, सह-सम्बन्ध गुणांक की मात्रा उतनी ही अधिक होगी । इस रेखा को प्रतीपगमन रेखा (Regression line) भी कहा जाता है । इसकी सहायता से किसी एक ज्ञात मूल्य के आधार पर दूसरे आश्रित चर के अज्ञात मूल्य को ज्ञात किया जा सकता है ।

गुण व दोष (Merit and Demerits)–सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की यह विधि काफी सरल है । इसमें किसी प्रकार की गणितीय क्रिया की आवश्यकता नहीं होती । चित्रमय प्रदर्शन के कारण आकर्षक ढंग से सह-सम्बन्ध का एक स्पष्ट एवं स्थायी अनुभव हो जाता है ।

इस विधि की प्रमुख कमी व दोष यह है कि इससे सह-सम्बन्ध की मात्रा का ठीक-ठीक ज्ञान नहीं हो सकता । इससे अनुमान मात्र ही लगाया जा सकता है ।

(2) **बिन्दु रेखीय विधि**-यह विधि विक्षेप चित्र विधि से बहुत समानता रखती है । इसमें दी गयी दोनों चरमालाओं को जिनके बीच सह-सम्बन्ध का अध्ययन करना है, बिन्दुरेखीय पत्र पर प्रांकित कर देते हैं । समय, स्थान अथवा कोई अन्य उभयनिष्ठ गुण को भुजाक्ष

(OX) रेखा पर श्रेणियों के मूल्यों को कोटि अक्ष (OY) पर दिखाया जाता है । दोनों चर मालाओं को अलग-अलग रंगों तथा चिन्हों से तैयार किया जाता है । इस प्रकार दो वक्र बिन्दुरेखीय पत्र पर अंकित हो जाते हैं । फिर दोनों वक्र की रचना एवं प्रकृति को देखकर सह-सम्बन्ध की प्रकृति एवं मात्रा का अनुमान लगाया जाता है ।

यदि दोनों वक्र एक ही दिशा में बढ़ते व घटते हैं तो इससे उनके बीच प्रत्यक्ष धनात्मक सह-सम्बन्ध का बोध होता है । इसके विपरीत यदि दोनों वक्र दो विपरीत दिशाओं में विचलन करते हैं तो इससे उनके बीच अप्रत्यक्ष, ऋणात्मक सह-सम्बन्ध का बोध होता है । यदि दोनों वक्र एक दूसरे के समानान्तर विचरण करते हैं तो उनके बीच पूर्ण सह-सम्बन्ध होता है । दोनों वक्रों के उच्चावचन की प्रवृत्ति जितनी समान होगी, सह-सम्बन्ध की मात्रा उतनी ही अधिक मानी जायेगी । यदि दोनों वक्रों में एक ही दिशा या विपरीत दिशाओं में परिवर्तित होने की कोई प्रवृत्ति नहीं पाई जाती तो दोनों में सह-सम्बन्ध का अभाव समझा जाता है ।

गुण व दोष (Merit and Demerits)– यह विधि भी सह-सम्बन्ध का केवल चाक्षुष अध्ययन (Visual study) करती है । उसकी मात्रा का ठीक-ठीक पता इससे नहीं चलता । इस विधि के भी वही गुण-दोष हैं जो विक्षेप चित्र विधि के हैं ।

(3) **संगामी विचलन गुणांक**-इस विधि के अन्तर्गत सर्वप्रथम तो दोनों समंकमालाओं के लिए विचलन (d) निकाले जाते हैं । विचलन लेने के लिए प्रत्येक पद में से उसके पूर्व के पद को घटा देते हैं । विचलन की मात्रा पर ध्यान नहीं दिया जाता । विचलन की दिशा (+) या (−) की ओर ही ध्यान दिया जाता है । यदि किसी पद का मूल्य उसके पूर्व वाले पद के मूल्य से बड़ा हो तो विचलन धनात्मक (+) होगा तथा इसके विपरीत स्थिति में विचलन ऋणात्मक (−) होगा । यदि किसी पद का मूल्य उससे पूर्व वाले पद के मूल्य के बराबर है तो विचलन शून्य (0) होता है ।

विचलन लेने के पश्चात् x तथा y दोनों समंकमालाओं के तत्सम्बन्धी विचलन चिन्हों को गुणा करके संगामी विचलन वाले कॉलम में लिख दिया जाता है ।

संगामी विचलन वाले कॉलम में लिखे गये धनात्मक चिन्हों (+) को गिन लिया जाता है । इसे संगामी विचलनों की संख्या कहते हैं तथा इसे (C) से व्यक्त किया जाता है ।

अंत में निम्न सूत्र का उपयोग करके सह-सम्बन्ध का पता लगाया जाता है ।

$$rc - \pm\sqrt{\pm\frac{2c-n}{n}}$$

यहाँ rc = Coefficient of Concurrent Correlation.

c = No. of Concurrent deviations.

n = No. of items for which deviations have been taken or N – 1

निम्न उदाहरण के माध्यम से इसकी क्रियाविधि को स्पष्ट किया जा सकता है-

उदाहरण-1

Calculate Coefficient of correlation of concurrent deviation method.

X	:	15	18	25	20	18	22	17	16
Y	:	50	52	50	55	60	58	55	56

हल :

X	(dx)	Y	dy	Concurrent Deviation or C
15		50		
18	+	52	+	+
25	+	50	–	–
20	–	55	+	–
18	–	60	+	–
22	+	58	–	–
17	–	55	–	+
16	–	56	+	–
	n = 7		n = 7	c = 2

$$rc = \pm\sqrt{\pm\frac{2c-n}{n}}$$

$$= \pm\sqrt{\pm\frac{2\times 2-7}{7}}$$

$$\left(= \pm\sqrt{\frac{4-7}{7}}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{-3}{7}} = -\sqrt{.4285714} = -0.65$$

$$rc = -0.65.$$

गुण-दोष (Merits and Demerits)–यह विधि गणना की दृष्टि से सरल है किन्तु इससे सह-सम्बन्ध की दिशा का ही पता चलता है । सह-सम्बन्ध की मात्रा का पता नहीं चलता । इसमें विचलन की मात्रा नहीं बल्कि विचलन की दिशा पर ध्यान दिया जाता है, अत: इसके परिणाम अविश्वसनीय होते हैं ।

ऊपर जिन तीन विधियों की चर्चा अब तक हमलोग कर चुके वे सब सह-सम्बन्ध की दिशा व प्रकृति को ही बता पाती हैं । सह-सम्बन्ध की मात्रा का ज्ञान कराने में वे पूर्णत: असमर्थ हैं । यही कारण है कि व्यवहार में इनका उपयोग बहुत कम किया जाता है ।

(4) **कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणांक**-कार्ल पियर्सन की विधि सह-सम्बन्ध को मापने की सबसे अच्छी एवं लोकप्रिय विधि है । अगर किन्हीं दो चरों के बीच सह-सम्बन्ध की गणना की किसी विशेष विधि का संकेत नहीं हो तो सामान्यत: वहाँ कार्ल पियर्सन की विधि का ही उपयोग किया जाता है । इस विधि की विशेषता यह है कि इसके द्वारा दो चरों के मध्य उपस्थित सह-सम्बन्ध की मात्रा व दिशा दोनों का पता लग लाता है । समान्तर माध्य माध्य $(\overline{X})$ तथा प्रमाप विचलन (—) पर आधारित होने के कारण गणितीय दृष्टि से भी यह विधि उपयुक्त होती है । इस विधि द्वारा दोनों चरों के मध्य सह-विचरण (Co-variation) को भी ज्ञात किया जा सकता है । दो चरों के मध्य सह-सम्बन्ध ज्ञात करने के लिए कार्ल पियर्सन की विधि को (क) प्रत्यक्ष रीति तथा (ख) लघु रीति-दो रूपों में प्रयोग किया जाता है । कार्ल पियर्सन के सह-सम्बन्ध गुणांक को (r) से व्यक्त किया जाता है ।

(क) प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)–इस रीति से सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित प्रक्रियाओं को पूर्ण किया जाता है :

(i) दोनों समंकमालाओं का अलग-अलग समान्तर माध्य अर्थात $\bar{x}$ तथा $\bar{y}$ ज्ञात किया जाता है ।

(ii) उसके पश्चात् प्रत्येक श्रेणी के व्यक्तिगत मूल्यों का उनके समान्तर माध्य से विचलन किया जाता है, जिसे क्रमशः $d\bar{x}$ तथा $d\bar{y}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है ।

(iii) दोनों समंकमालाओं के संबंधित विचलनों को गुणा करके गुणनफलों का योग $(\Sigma d\bar{x}\ d\bar{y})$ ज्ञात किया जाता है ।

(iv) दोनों समंकमालाओं का अलग-अलग प्रमाप विचलन (—x तथा —y) ज्ञात किया जाता है ।

(v) अन्त में निम्न सूत्रों का उपयोग करके सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कर लिया जाता है :

(A) $$r = \frac{\Sigma dx.\ d\bar{y}}{N j\ x.-y}$$

(B) $$r = \frac{\Sigma d\bar{x}.d\bar{y}}{N\sqrt{\frac{\Sigma d^2\bar{x}}{N}} \times \sqrt{\frac{\Sigma d^2\bar{y}}{N}}}$$

(C) $$r = \frac{\Sigma d\bar{x}.d\bar{y}}{\sqrt{\Sigma d^2\bar{x}.Xd^2\bar{y}}}$$

उपर्युक्त सूत्रों में प्रयुक्त :

r = सह-सम्बन्ध गुणांक

N= समंकमालाओं में पदों की संख्या (दोनों ही श्रेणियों में पदों की संख्या समान रहती है । किसी एक ही श्रेणी के पदों की संख्या का उपयोग किया जाता है ।

ऊपर लिखे गये तीनों सूत्रों में कोई मूल अन्तर नहीं है । सूत्र B तथा C प्रथम सूत्र A के सरल रूप हैं । हम सम्बन्ध की गणना करते समय किसी भी सूत्र का उपयोग कर सकते हैं । प्रथम सूत्र का उपयोग उस समय करना चाहिए जब दोनों ही समंकमालाओं के प्रमाप विचलनों के मान ज्ञात हों अन्यथा प्रमाप विचलनों को ज्ञात करने में काफी समय लग जाता है । ऐसी स्थिति में अर्थात् प्रमाप विचलन ज्ञात नहीं रहने पर सूत्र (B) अथवा (C) का उपयोग करना चाहिए । आमतौर पर सूत्र (C) का उपयोग ज्यादा किया जाता है क्योंकि यह सूत्र (B) का ही सरलतम रूप है । निम्न उदाहरण के द्वारा प्रत्यक्ष रीति से सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना प्रक्रिया को सरलतापूर्वक समझा जा सकता है-

उदाहरण-2

वाणिज्य महाविद्यालय के बी० कॉम० के 10 छात्रों द्वारा दो विषयों-सांख्यिकी और अर्थशास्त्र में प्राप्त अंक निम्न प्रकार हैं-

Statistics :	50	40	60	50	55	35	45	65	70	30
Economics :	60	50	80	60	45	50	55	60	80	60

उपर्युक्त आँकड़ों से सांख्यिकी और अर्थशास्त्र विषयों के प्राप्तांकों के बीच सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिये ।

हल :

सांख्यिकी प्राप्तांक (X)	$(X-\bar{X})$ $d\bar{x}$	विचलनों का वर्ग $d^2\bar{x}$	अर्थशास्त्र का प्राप्तांक (y)	समान्तर माध्य से विचलन $\bar{y}-\bar{y}=d\bar{y}$	विचलनों का वर्ग d^2y	विचलनों का गुणनफल $d\bar{x}.d\bar{y}$
50	0	0	60	0	0	0
40	−10	100	50	−10	100	100
60	10	100	80	20	400	200
50	0	0	60	0	0	0
55	5	25	45	−15	225	−75
35	−15	225	50	−10	100	150
45	− 5	25	55	− 5	25	25
65	15	225	60	0	0	0
70	20	400	80	20	400	400
30	−20	400	60	0	0	0
कुल : 500		1500	600		1250	800

(i) $\bar{X}=\frac{\Sigma x}{N}=\frac{500}{10}=50$ (i) $\bar{Y}=\frac{\Sigma y}{N}=\frac{600}{10}=60$

हम जानते हैं कि $r=\frac{\Sigma d\bar{x}.d\bar{y}}{\sqrt{\Sigma d^2x.\Sigma d^2\bar{y}}}$

ऊपर के सूत्र में मान रखने पर :

$$r=\frac{800}{\sqrt{1500\times1250}}=\frac{800}{\sqrt{1875000}}=\frac{800}{1369.31}=0.58$$

अतः सांख्यिकी और अर्थशास्त्र के प्राप्तांकों के बीच का मध्यम स्तरीय धनात्मक सह-सम्बन्ध है ।

उदाहरण-3

निम्नलिखित सूचनाओं के आधार पर X तथा Y दो चरों के बीच सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करें :

$\bar{X}=35,$ j $x=3.6$

$\Sigma d\bar{x}.\ d\bar{y}=60$ तथा $N=10$

$\bar{Y}=31,$ j 4.1

हल :

$$r = \frac{d\overline{x}.d\overline{y}}{N.j\ \overline{x}.j\ y} = \frac{6}{10 \times 3.6 \times 4.1} = \frac{6.}{1476} = 0.41$$

$r = 0.41$

अत: x तथा y के बीच धनात्मक मध्यम स्तरीय सह-सम्बन्ध है ।

(ख) **लघु रीति** (Shortcut Method)–सह-सम्बन्ध गुणांक निकालने की प्रत्यक्ष रीति में गणना प्रक्रिया काफी जटिल हो जाती है । सर्वप्रथम तो दोनों श्रेणियों का वास्तविक समान्तर माध्य निकाला जाता है । तत्पश्चात् श्रेणी के प्रत्येक मूल्य से विचलन निकाले जाते हैं । अगर समान्तर माध्य पूर्णांक नहीं आता तो विचलन निकलने में परेशानी बढ़ जाती है । विचलनों के माध्य दशमलव में आते हैं । फिर इन विचलनों का वर्ग करने में भी कठिनाई होती है । इन्हीं कठिनाइयों को समाप्त करने के लिए लघु रीति का उपयोग किया जाता है । इस रीति में पदों का विचलन उनके वास्तविक समान्तर माध्य से नहीं बल्कि किसी कल्पित पूर्णांक संख्या से निकाला जाता है । सामान्यत: श्रेणी में उपस्थित किसी पूर्णांक मान को ही काल्पनिक समान्तर माध्य मान लिया जाता है । इससे लिये गये विचलनों के मान भी पूर्णांक में आते हैं जिससे उनके वर्ग निकालने तथा विचलनों के गुणनफल निकालने में किसी प्रकार की कठिनाई नहीं होती । गणना क्रिया सरल हो जाती है तथा दशमलव से हमारा पीछा छूट जाता है । लघु रीति की गणना प्रक्रिया के प्रमुख अंग निम्नलिखित हैं :

(i) सर्वप्रथम x तथा y दोनों श्रेणियों में उपलब्ध अलग-अलग मानों को उनका कल्पित समान्तर माध्य मान लिया जाता है।

(ii) प्रत्येक श्रेणी के प्रत्येक पदमान में से उसका काल्पनिक समान्तर माध्य घटाते हुए विचलन लेते हैं । x श्रेणी के ऐसे विचलनों को dx तथा y श्रेणी के ऐसे विचलनों को dy से दर्शाते हैं ।

(iii) प्राप्त विचलनों अर्थात् dx तथा dy का वर्ग करके क्रमश: d^2x तथा d^2y प्राप्त कर लिया जाता है ।

(iv) दोनों श्रेणियों के तत्संबंधित विचलनों का गुणा करके उनका गुणनफल dx.dy ज्ञात किया जाता है ।

(v) दोनों ही श्रेणियों से संबंधित विभिन्न कॉलमों (खानों) का योग अर्थात् Σdx, Σd^2x, Σdy, Σd^2y तथा $\Sigma dx..dy$ ज्ञात कर लिया जाता है ।

(vi) अंत में निम्न सूत्र का उपयोग करके सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कर लिया जाता है :

$$r = \frac{N.\Sigma dx.dy - (\Sigma dx)(\Sigma dy)}{\sqrt{N\Sigma d^2x - (\Sigma dx)^2} \times \sqrt{N\Sigma d^2y - (\Sigma dy)^2}}$$

निम्न उदाहरण के माध्यम से उपर्युक्त सूत्र के उपयोग को स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण-4

निम्नलिखित आँकड़ों से विज्ञापन व्यय तथा बिक्री राशियों (lakh) के बीच सह-सम्बन्ध ज्ञात करें :

विज्ञापन व्यय :	39	65	62	90	82	75	25	98	36	78
बिक्री राशि :	47	53	58	86	62	68	60	91	51	84

लघु रीति से सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना

विज्ञापन व्यय x	dx/90	d^2x	विक्रय राशी (y)	dy/90	d^2y	dx.dy
39	−51	2601	47	−13	169	663
65	−25	625	53	− 7	49	175
62	−28	784	58	− 2	4	56
90	0	0	86	26	676	0
82	− 8	64	62	2	4	− 16
75	−15	225	68	8	64	−120
25	−65	4225	60	0	0	0
98	8	64	91	31	961	248
36	−54	2961	51	− 9	81	486
78	−12	144	84	24	576	−288
	−250	11,648		60	2548	1204

माना कि श्रेणी X का काल्पनिक समान्तर माध्य = 90

तथा श्रेणी Y का काल्पनिक समान्तर माध्य = 60

$$r = \frac{N.\Sigma dx.dy - (\Sigma dx)(\Sigma dy)}{\sqrt{N\Sigma Id^2x - (\Sigma Idx)^2} \times \sqrt{N\Sigma d^2y - (\Sigma dy)^2}}$$

$$= \frac{10 \times 1204 - (-250)(60)}{\sqrt{10 \times 11648 - (-250)^2}} \times \sqrt{10 \times 2584 - (60)^2}$$

$$= \frac{12040 + 15000}{\sqrt{116480 - 62500} \times \sqrt{25840 - 3600}}$$

$$= \frac{27040}{\sqrt{53980} \times \sqrt{22240}} = \frac{27040}{232.34 \times 149.13}$$

$$= \frac{27040}{34648.86} = 0.78$$

अत: विज्ञापन व्यय और विक्रय राशि में धनात्मक उच्च्र स्तरीय सह-सम्बन्ध है ।

गुण एवं दोष
(Merits and Demerits)

सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की कार्ल पियर्सन की विधि बहुत ही लोकप्रिय है । यह एक ही साथ सह-सम्बन्ध की दिशा एवं मात्रा दोनों की जानकारी देती है । इसके परिणाम अधिक विश्वसनीय भी हैं किन्तु इसकी गणना प्रक्रिया काफी विस्तृत है । इसे करने में काफी समय लगता है तथा समझने के लिए प्रयत्न करना पड़ता है ।

आदर्श प्रश्न
(Model Questions)

1. निम्नलिखित के बीच सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करें तथा उसका संभाव्य विभ्रम निकालें :

Marks in History :	20	30	20	17	19	23	35	13	16
Marks in Geography :	25	35	20	18	25	28	33	18	20

2. Calculate coefficient of correlation between the following and interpret from your answer.

A :	30	31	32	29	28	27	27	34	36	36
B :	60	61	62	63	59	58	57	57	66	67

3. सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की विधियों के नाम बतावें तथा बिन्दुरेखीय विधि का वर्णन करें ।

4. पिता और पुत्र की ऊँचाई से संबंधित निम्नलिखित समंकों के आधार पर सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करें ।

पिता की ऊँचाई (इंच में) :	65	66	67	67	68	69	71	73
पुत्र की ऊचाई (इंच में) :	67	68	64	68	72	70	69	70

पाठ-24

सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना (द्वितीय)
(Calculation of Correlation Coefficient) (II)

प्रिय छात्रो,

इस पाठ में हमलोग गुण-परिघात सह-सम्बन्ध विधि तथा स्पीयरमैन की कोटि अन्तर विधि की चर्चा करेंगे ।

गुणन-परिघात सह-सम्बन्ध गुणांक
(Product Moment Correlation Coefficient)

सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की यह विधि बहुत ही सरल है । वास्तव में कार्ल पियर्सन ने इसी विधि का प्रयोग किया है, जिसकी चर्चा पिछले पाठ में हो चुकी है । कार्ल पियर्सन के सूत्र को ही यहाँ दूसरे रूप में दिया जा रहा है । इस प्रकार प्राप्त गुणांक को गुणनपरिघात सह-सम्बन्ध गुणांक कहते हैं । इसका उपयोग उस समय करना चाहिए जब दोनों श्रेणियों में इकाइयों की संख्या कम हो तथा इकाइयों का मूल्य भी बहुत कम हो । इसकी क्रियाविधि निम्न प्रकार है-

(1) सर्वप्रथम x तथा y दोनों श्रेणियों में दिये गये मूल्यों का वर्ग करके x^2 तथा y^2 ज्ञात कर लिया जाता है ।

(2) x तथा y के मूल्यों को गुणा करके उनके गुणनफलों का योग Σxy प्राप्त कर लिया जाता है ।

(3) अन्त में निम्न सूत्र का उपयोग कर सह-सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कर लिया जाता है ।

$$r = \frac{N.\Sigma xy.j\ (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{N\Sigma x^2\ j\ (\Sigma x)^2} \times \sqrt{N\Sigma y^2\ j\ (\Sigma y)^2}}$$

उदाहरण-1

Calculate the coefficient of correlation by Product Moment Method from the following :

x :	8	12	16	20	24	28	32
y :	2	4	6	8	10	12	14

हल :

Calculation of correlation coefficient

X	X^2	Y	Y^2	X.Y
8	64	2	4	16
12	144	4	16	48
16	256	6	36	96
20	400	8	64	160
24	576	10	100	240
28	784	12	144	336
32	1024	14	196	448
140	3248	56	560	1344

$$r = \frac{N.\Sigma xy.j\ (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{N\Sigma x^2\ j\ (\Sigma x)^2} \times \sqrt{N\Sigma y^2\ j\ (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{7 \times 1344\,j\ (140 \times 56)}{\sqrt{7 \times 3248\,j\ (140)^2} \times \sqrt{7 \times 560\,j\ (56)^2}}$$

$$= \frac{9408\,j\ 7840}{\sqrt{7 \times 3248\,j\ (140)^2} \times \sqrt{7 \times 560\,j\ (56)^2}}$$

$$= \frac{1568}{\sqrt{3136 \times 784}} = \frac{1568}{\sqrt{2458624}}$$

$$= \frac{1568}{1568} = 1$$

अत: X और Y के बीच धनात्मक पूर्ण सह-सम्बन्ध है ।