(3) किसी पद का मान शून्य होने, ऋणात्मक होने अथवा अज्ञात होने की दशा में गुणोत्तर माध्य की गणना असम्भव हो जाती है।

गुणोत्तर माध्य के उपयोग
(Use of Geometric Mean)

(1) अनुपातों व प्रतिशत वृद्धि दरों का औसत निकालने के लिए गुणोत्तर माध्य सबसे उपयुक्त होता है ।

(2) जब पदमाला के छोटे मूल्यों को अधिक तथा बड़े मूल्यों को कम महत्व देना हो तब यह माध्य उपयुक्त होता है ।

(3) संचयी प्रभाव अथवा चक्रवृद्धि दर से बढ़ने या घटने वाली सूचनाओं का औसत निकालने के लिए यह माध्य सबसे उत्तम होता है ।

(4) अधिक भिन्नता वाले मदों अथवा अत्यधिक विषमता वाले आवृत्ति वितरणों के औसत के रूप में गुणोत्तर माध्य का उपयोग सबसे अच्छा होता है ।

●

आदर्श
Model Questions

(1) निम्न समंकों से गुणोत्तर माध्य ज्ञात करें :

4328, 592.35, 83.65, 5.832, 0.7698, 0.05263, 0.00506, 50.062.

(2) Find the geometric mean of the following :

Size :	4	8	12	16	20	24
Frequency :	15	10	3	20	2	18

(3) Compute geometric mean of the following :

Class :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
f :	5	40	10	50	5

(4) यदि किसी वस्तु की कीमत 4 वर्ष की अवधि में दुगुनी हो जाती है, तो प्रति वर्ष औसत वार्षिक वृद्धि दर क्या है ?

(5) एक मशीन पर प्रथम वर्ष में 40% की दर से, द्वितीय वर्ष्ज्ञ में 25% की दर से, तृतीय वर्ष में 15% की दर से तथा अगले दो वर्षों में 8% की दर से वार्षिक ह्रास लगाया जाता है, प्रत्येक प्रतिशत घटते हुए पर निकाली जाती है । पूरी अवधि के लिए ह्रास औसत प्रतिशत दर बतावें ।

●

हरात्मक माध्य
(Harmonic Mean)

प्रिय छात्रो,

किसी श्रेणी का हरात्मक माध्य उसके सभी पदों के व्युत्क्रमों (Reciprocals) के समान्तर माध्य (Simple mean) का व्युत्क्रम होता है । यह एक विशेष प्रकार का माध्य होता है । इसका उपयोग चाल अथवा गति की औसत दर आदि ज्ञात करने के लिए किया जाता है । इसे Hm. द्वारा व्यक्त किया जता है । हरात्मक माध्य को ज्ञात करने के लिए श्रेणी के सभी पदों का व्युत्क्रम निकाला जाता है । किसी भी संख्या या पदमान का व्युत्क्रम 1 में उस संख्या अथवा पदमान से भाग देने से प्राप्त होता है । इस प्रकार प्राप्त व्युत्क्रमों का योग किया जाता है और व्युत्क्रमों के योग में पदों की संख्या से भाग देकर उनका औसत ज्ञात कर लिया जाता है । अंत में इस औसत का व्युत्क्रम निकाल लिया जाता है । इसके लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है ।

$$Hm = \text{Reciprocal of } \frac{\Sigma \text{Reciprocals}}{N}$$

अथवा

$$Hm = \frac{N}{\Sigma \text{Reciprocals}}$$

ऊपर के दोनां सूत्र एक ही हैं । दूसरा सूत्र तो प्रथम सूत्र का ही सरल रूप है ।

हरात्मक माध्य की गणना
(Calculation of Harmonic Mean)

(1) व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series)–व्यक्तिगत श्रेणी में हरात्मक माध्य ज्ञात करना काफी सरल है । सर्वप्रथम तो सभी पदों का व्यूत्क्रम ज्ञात कर लिया जाता है तत्पश्चात् उपर्युक्त सेत्रों में से किसी का भी उपयोग करके हरात्मक माध्य ज्ञात कर लिया जाता है। निम्न उदाहरण से इसे स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण - 1

निम्नलिखित का हरात्मक माध्य ज्ञात करें :

10 8 5 2 3

हल :

$$Hm = \text{Reciprocal of } \frac{\Sigma \text{Reciprocals}}{N}$$

$$\Sigma \text{ Reciprocals} = \frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{151}{120}$$

N=5

सूत्र में मान रखने पर :

$$Hm = \text{Reciprocal of } \frac{\frac{151}{120}}{5} = \text{Reciprocal or } \frac{151}{600}$$

$$= \frac{1}{\frac{151}{600}} = \frac{600}{151} = 3.97$$

$\therefore$ Hm = 3.97 Ans.

उदाहरण - 2

एक व्यक्ति दानापुर से पटना सिटी की दूरी 30 कि० मी० प्रति घंटा की गति से तय करता है और वापसी यात्रा 60 कि० मी० प्रति घंटा की गति से तय करता है तो पूरी यात्रा के लिए उसकी औसत गति क्या है ?

हल :

$$\text{Hm} = \text{Reciprocal of } \frac{\Sigma \text{ Reciprocals}}{\text{N}}$$

$$\Sigma \text{ Reciprocals} = \frac{1}{30} + \frac{1}{60}$$

N = 2

$$\text{Hm} = \frac{\text{N}}{\Sigma \text{ Reciprocals}} = \frac{2}{\frac{1}{30} + \frac{1}{60}} = \frac{2}{\frac{2+1}{60}} = \frac{2}{\frac{3}{60}}$$

$$= \frac{2}{1} \times \frac{60}{3} = \frac{120}{3} = 40$$ 40 कि० मी० प्रति घंटा

$\therefore$ औसत गति = 40 कि० मी० प्रति घंटा

उदाहरण - 3

In a certain factory a unit of work is completed by A in 4 minutes, by B in 5 minutes, by C in 6 minutes, by D in minutes and by E in 12 minutes. What is their average rate of working.

हल :

चूँकि समान कार्य की मात्रा को भिन्न श्रमिकों द्वारा भिन्न-भिन्न गति से सम्पन्न किया गया है अतः कार्य की औसत गति निकालने के लिए हरात्मक माध्य का उपयोग वांछित है ।

$$\text{Hm} = \frac{\text{N}}{\Sigma \text{ Reciprocals}}$$

यहाँ : N = 5

$$\Sigma \text{ Reciprocals} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{48}{60}$$

सूत्र में मान रखने पर

$$\text{Hm} = \frac{5}{\frac{48}{60}} = \frac{5}{1} \times \frac{60}{48} = \frac{5}{1} \times \frac{5}{4} = \frac{25}{4} = 6.25$$

$\therefore$ कार्य की औसत गति = 6.25 मिनट प्रति इकाई ।

उदाहरण - 4

एक हवाई जहाज 1000 कि० मी० भुजा वाले एक वर्गाकार क्षेत्र का एक चक्कर लगाता है । वर्गाकार क्षेत्र की चारों भुजाओं को वह जहाज क्रमशः 1000, 2000, 3000 एवं 4000 कि० मी० प्रति घंटा की गति से तय करता है । हवाई जहाज की औसत गति ज्ञात करें ।

हल :

यहाँ N=4

$$\Sigma \text{ Raciprocals } = \frac{1}{1000}+\frac{1}{2000}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{4000}=\frac{25}{12000}$$

$$Hm = \frac{N}{\Sigma \text{ Reciprocals}}$$

$$= \frac{4}{\frac{25}{12000}} = \frac{4}{1} \times \frac{12000}{25} = 1920$$

$\therefore$ औसत गति = 1920 कि० मी० प्रति घण्टा ।

व्युत्क्रम ज्ञात करने की जिस रीति का अब तक हमलोग उपयोग करते आ रहे हैं वह सरल तो है किन्तु जैसे-जैसे श्रेणी के पदमानों का आकार बढ़ता जाता है अथवा उनका मान दशमलव में दिया हुआ हो तो इस रीति से व्युत्क्रम ज्ञात करना कठिन हो जाता है । यदि निकाला भी जाय तो समय अधिक लगेगा तथा गलती की सम्भावना भी अधिक होगी । अतः ऐसी परिस्थिति में व्युत्क्रम जानने के लिए व्युत्क्रम तालिका (Reciprocal Table) की सहायता ली जाती है । अब हमलोग सर्वप्रथम व्युत्क्रम तालिका देखने की विधि की चर्चा करेंगे तत्पश्चात् उदाहरणों के माध्यम से उसे उपयोग में लायेंगे ।

व्युत्क्रम सारणी भी लघुगुणक सारणी के समान तीन खण्डों में बंटी हुई होती है । प्रथम खण्ड में एक ही स्तम्भ होता है । द्वितीय या मध्य खण्ड में 0 से 9 तक के नौ स्तम्भ होते हैं । जिस संख्या का व्युत्क्रम देखना होता है उसे सर्वप्रथम उपसादित करके चार अंकों का बना दिया जाता है । फिर पहले दो अंक Vertical side पर अर्थात प्रथम स्तम्भ में खोजे जाते हैं । इस स्तम्भ में 1.0 से 9.9 तक की संख्याएँ बढ़ते क्रम में दी होती हैं । दी गयी संख्या में दशमलव को इस प्रकार खिसकाते हैं कि वह व्युत्क्रम सारणी के प्रथम कॉलम में मिल जाय । दी गयी संख्या के तीसरे अंक व्युत्क्रम सारणी के Horizontal side अर्थात मध्य खण्ड पर तथा चौथा अंक Mean difference में देखकर मध्य खण्ड से प्राप्त संख्या से प्राप्त संख्या में से घटा लेते हैं । इस प्रकार प्राप्त संख्या में दशमलव को उसी दिशा में तथा उतने ही अंक खिसका देते हैं जिस दिशा में तथा जितने अंक उसे प्रारम्भ में खिसकाया गया था । उदाहरण के लिए यदि 5 का व्युत्क्रम देखना है तो व्युत्क्रम तालिका के प्रथम स्तम्भ में 5 खोजकर उसके सामने मध्य खण्ड के शून्य वाले स्तम्भ का मान पढ़ लेते हैं जो .2000 है । यहाँ दशमलव अपने स्थान पर बना रहेगा क्योंकि मूल संख्या में दशमलव को खिसकाये बिना ही वह व्युत्क्रम सारणी के प्रथम स्तम्भ में मिल गयी थी । मान लें हमें 55 का व्युत्क्रम देखना है । यह संख्या तो अपने मूल रूप में सारणी के प्रथम स्तम्भ में नहीं मिल सकती अतः दशमलव को एक अंग बायें खिसकाते हुए इसे 5.5 बना लिया गया और 5.5 को प्रथम स्तम्भ में खोज कर उसके सामने मध्य खण्ड के शून्य स्तम्भ का मान पढ़ लिया जो .1818 है । याद रहे कि हम प्रारम्भ में ही मूल संख्या में दशमलव का एक अंक बायें खिसका दिये थे अतः यहाँ भी दशमलव को एक अंक बायें खिसका दिया जायेगा । अतः 55 का व्युत्क्रम .01818 हुआ । उसी प्रकार यदि 5648 का व्युत्क्रम ज्ञात करना हो तो दशमलव को एक अंक बायें खिसकाकर इसे 5.648 बना लिया जायेगा और तब 5.6 के सामने मध्य खण्ड के 4 वाले स्तम्भ का मूल्य पढ़ा जायेगा जो .1773 है । 8 का मूल्य Mean difference स्तम्भ में आठवें स्तम्भ में देखा जायेगा जो 3 है । इसे मध्य खण्ड के मान .1773 में से घटा देने पर .1770 प्राप्त होगा । अब दशमलव को तीन अंक बायें खिसका दिया जायेगा क्योंकि मूल संख्या में प्रारम्भ में ही हम ऐसा परिवर्तन कर चुके हैं । अतः 5648 का व्युत्क्रम .0001770 हुआ । आवश्यकतानुसार इसे उपसादित भी किया जा सकता है ।

इस प्रकार स्पष्ट है कि किसी दी गयी संख्या का व्युत्क्रम देखने के लिए सर्वप्रथम यह देखते हैं कि उस संख्या के प्रथम दो अंक व्युत्क्रम सारणी के प्रथम स्तम्भ में मिल रहे हैं कि नहीं अन्यथा उनमें परिवर्तन करके प्रथम स्तम्भ में मिलने लायक बना लेना पड़ता है। उसी के अनुरूप अन्तिम परिणाम में भी परिवर्तन कर लिया जाता है । निम्न उदाहरण से यह और भी स्पष्ट हो जायेगा ।

उदाहरण - 5

85 70 10 75 500 8 42 250 40 और 36

हल :

x	Reciprocal
85	.01176
70	.01429
10	10000
75	.01333
500	.00200
8	.12500
42	.02381
250	.00400
40	.02500
36	.02778
	0.34697

$$Hm = \frac{N}{\Sigma \text{ Reciprocal}}$$

$$= \frac{10}{0.34697}$$

$$= 28.82 \text{ Ans.}$$

उदाहरण - **6**

Compute harmonic **mean from the following data**

800, 78.3, 9.45, **676, .07834, .004656, 0003425, .0002853**

हल :

x	Reciprocal
800	.001250
78.5	.012770
9.45	.105800
676	1.479000
.07834	12.76000
0044656	214.800000
.0003425	2920.000000
.00002835	3505.000000
n = 8	38199.158820 = Σ Recip

$$Hm = \text{Reciprocal of } \frac{\Sigma \text{ Reciprocals}}{N}$$

$$= \text{Recp. of } \frac{38199.158820}{8}$$

=Recp. of 4774.8948525
= .0002094
$\therefore$ Hm = 0.0002094 Ans.

(2) खण्डित श्रेणी (Discrete Series)–खण्डित श्रेणी में हरात्मक माध्य ज्ञात करने के लिए निम्न प्रक्रियाएँ सम्पन्न की जाती हैं :

1. सर्वप्रथम, प्रत्येक पदमान (X) का व्युत्क्रम निकाला जाता है ।
2. व्युत्क्रमों को तत्संबंधित आवृत्ति से गुणा करके गुणनफलों का योग (Σ(Reciprocal X)f) ज्ञात कर लिया जाता है ।
3. अंत में निम्न सूत्र का उपयोग करके हरात्मक माध्य ज्ञात कर लिया जाता है ।

$$Hm = \text{Reciprocal or } \frac{\Sigma(\text{Reciprocal x}) \text{ f}}{N}$$

निम्न उदाहरण से गणना क्रिया को और स्पष्ट किया जा सकता है ।

उदाहरण-6

निम्न वितरण का हरात्मक माध्य ज्ञात करें :

X	:	2	3	4	5	6
f	:	4	9	16	10	24

हल :

X	Reciprocal (X)	f	(Recp. X) f
2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{2} \times = 2$
3	$\frac{1}{3}$	9	$\frac{1}{4} \times 9 = 3$
4	$\frac{1}{4}$	16	$\frac{1}{4} \times 16 = 4$
5	$\frac{1}{5}$	10	$\frac{1}{5} \times 10 = 2$
6	$\frac{1}{6}$	24	$\frac{1}{6} \times 24 = 4$
		N = 63	Σ Recp. f = 15

$$Hm = \frac{N}{\Sigma \text{ Recip.f}}$$

$$= \frac{63}{15} = 4.2$$

$\therefore$ Hm = 4.2 Ans.

उपर्युक्त प्रश्न को व्युत्क्रम तालिका के उपयोग से निम्न प्रकार बनाया जा सकता है :

X	Reciprocal (X)	f	(Recp. X)f
2	0.500	4	2.0000
3	0.3333	9	2.9997
4	0.2500	16	4.0000
5	0.2000	10	2.0000
6	0.1667	24	4.0008
		63	15.0005

$$Hm = \text{Recp. of } \frac{\Sigma(\text{Recp. X})f}{N}$$

$$= \text{Recp. of } \frac{15.005}{63}$$

$$= \text{Recp. of } 0.2381031$$

$$= 4.202 \text{ or } 4.2 \text{ Ans.}$$

(3) सतत श्रेणी (Continuous Series)–सतत श्रेणी में हरात्मक माध्य निकालने के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया सम्पन्न की जाती है :

(i) सभी वर्गान्तरों का मध्य-मूल्य ज्ञात कर लिया जाता है ।

(ii) मध्य मूल्यों का व्युत्क्रम निकाल लिया जाता है ।

(iii) व्युत्क्रमों को तत्संबंधी आवृत्ति से गुणा करके गुणनफलों का योग $(\Sigma(\text{Recp. X})f)$ ज्ञात कर लिया जाता है ।

(iv) अंत में निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके हरात्मक माध्य ज्ञात कर लिया जाता है ।

$$Hm = \text{Reciprocal of } \frac{(\text{Reciprocal X})f}{N}$$

उदाहरण - 7

Calculate harmonic mean from the following :

Class :	0 – 8	8 – 16	16 – 24	24 – 32	32 – 40	40 – 48
Frequency :	12	16	13	10	8	11

हल :

Class	M. V	f.	Reciprocal (M.V)	Recp. Xf.
0 – 8	4	12	0.2500	3.0000
8 – 16	12	16	0.0833	1.3328
16 – 24	20	13	0.0500	0.6500
24 – 32	28	10	0-.0357	0.3570
32 – 40	36	8	0.0278	0.2224
40 – 48	44	11	0.0227	0.2497
		70		5.8119

$$Hm = \text{Recp. of } \frac{\Sigma(\text{Recp. X})f}{N}$$

$$= \text{Recp. of } \frac{5.8119}{70}$$

$$= \text{Recp. of } 0.0830271$$

$$= 12.05 \text{ Ans.}$$

भारित हरात्मक माध्य
(Weighted Harmonic Mean)

भारित हरात्मक माध्य को W. Hm. द्वारा व्यक्त किया जाता है । इसे ज्ञात करने के लिए मूल्यों के व्युत्क्रमों को तत्संबंधी भार से गुणा करके गुणनफलों का योग । (Σ Reciprocal. W) ज्ञात करते हैं तथा इसमें भारों के योग (Σ W) से भाग देकर प्राप्त भागफल का व्युत्क्रम निकाल लेते हैं । यही हरात्मक माध्य होता है । भारित माध्य की गणना के लिए निम्न सूत्र उपयोग में लाया जाता है ।

$$\text{W. H.m.} = \text{Reciprocal of } \frac{\Sigma(\text{Recp. X})W}{\Sigma W}$$

उदाहरण–8

निम्न सूचना के आधार पर हरात्मक माध्य ज्ञात करें :

Indices :	100	110	105	120	95	80	130
Weights :	5	6	8	9	2	4	6

हल :

Indices	Weights	Repiprocals	Reciprocal × W
100	5	010000	0.05000
110	6	.009091	.054546
105	8	.009524	0.076192
120	9	.008333	0.074997
95	2	.010530	0.021060
80	4	.012500	0.050000
130	6	.007692	0.046152
	40		**0.372947**

$$\text{W. H.m.} = \text{Reciprocal or } \frac{\Sigma(\text{Recip. X})W}{\Sigma W}$$

$$= \text{Reciprocal of } \frac{0.372947}{4}$$

$$= \text{Reciprocal or } 0.0093236$$

$$= 107.3$$

$\therefore$ W. Hm. = 107.3 Ans.

उदाहरण-9

A man travels 60 Kms with train which runs at the speed of 40 kms. per hour, 60 kms. with motor car which runs at the speed of 30 Kms. with cycle at the speed of 8 Km. per hour and 10 Kms. on foot at the speed of 5 Km. per hour. Calculate the average speed per hour of the whole journey.

हल :

यहाँ विभिन्न गति से अलग-अलग दूरियाँ तय की जाती हैं । अत: तय की गयी दूरी संबंधित गति से लिए भार का काम करेगी और यहाँ भारित हरात्मक माध्य उपयुक्त होगा ।

Speed in Kms.	Distance convered	Reciprocal	(Recip. X) W
40	60	0.0250	1,5000
30	60	0.0333	1.9980
8	20	0.1250	2.5000
5	10	0.2000	2.0000
	150		7.9980

$$\text{W. Hm.} = \text{Reciprocal of } \frac{\Sigma(\text{Recip.X})W}{\Sigma W}$$

$$= \text{Reciprocal of } \frac{7.9980}{150}$$

$$= \text{Reciprocal or } 0.05332$$

$$= 18.75 \text{ KM. per hour Ans.}$$

हरात्मक माध्य के गुण
(Merits of Harmonic Mean)

हरात्मक माध्य के गुण निम्नलिखित हैं ।

(1) हरात्मक माध्य के दोष निम्नलिखित हैं :

(2) इसकी गणना के लिए श्रेणी के सभी पदों की जानकारी आवश्यक है ।

(3) इसका उपयोग बहुत सीमित है ।

(4) गति (Motion) रफ्तार (Speed), चलन वेग (Velocity) आदि का माध्य निकालनं के लिए सबसे उपयुक्त होता है । यही कारण है कि भौतिक विज्ञान में हरात्मक माध्य का अधिक उपयोग होता है । इसके द्वारा समय व दूरी, समय व कार्य, आदि दरों का औसत निकाला जाता है ।

हरात्मक माध्य के दोष
(Demerits of Harmonic Mean)

हमात्मक माध्य के दोष निम्नलिखित हैं :

(1) इसकी गणना कठिन है ।

(2) इसकी गणना के लिए श्रेणी के सभी पदों की जानकारी आवश्यक है ।

(3) इसका उपयोग बहुत सीमित है ।

माध्यों का पारस्परिक सम्बन्ध

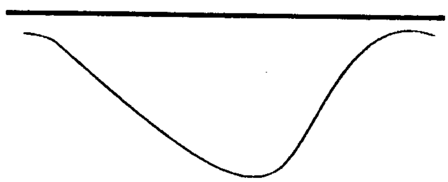
(Empirical Relationaship between Average)

अबतक हमलोग कुल पाँच प्रकार के औसतों, यथा बहुलक, मध्यका, समान्तर माध्य एवं हरात्मक माध्य की विस्तृत चर्चा कर चुके हैं । विभिन्न औसतों की अलग-अलग समंकमालाओं को उनकी बनावट के अनुसार उनके बीच सम्बन्ध निर्धारित किये जा सकते हैं । समंकमालाओं को उनकी बनावट के आधार पर पूर्ण सममितीय (Perfectly Symmetrical), औसत असममितीय (Moderately Asymmetrical) तथा अत्यधिक असममितीय (High asymmetrical), तीन भागों में बाँटा जा सकता है ।

(1) पूर्ण सममितीय समंकमाला (Perfectly Symmetrical Distribution)–इस प्रकार की समंकमाला में आवृत्तियों के उतारचढ़ाव में एकरूपता पायी जाती है । प्रारम्भ में आवृत्तियाँ जिस क्रम से बढ़ती हैं, एक निश्चित बिन्दु पर अधिकतम होकर उसी क्रम में घटने लगती हैं । इस अधिकतम बिन्दु के दोनों तरफ आवृत्तियों की संख्या समान रहती है। अगर ऐसे वितरण को आवृत्ति वक्र बनाकर दिखाया जाय तो हमें एक घटाकर आकृति प्राप्त होती है । इसे बीच से मोड़ देने पर दोनों खण्ड एक-दूसरे को पूर्णतः ढँक लेते हैं । निम्न उदाहरण से पूर्ण सममितीय आवृत्ति वितरण एवं वक्र की स्थिति स्पष्ट हो जायेगी :

उदाहरण-10

Class :	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
Frequency :	5	10	15	10	5



उपर्युक्त वितरण पूर्ण सममितीय आवृत्ति बंटन को दर्शाता है । इससे बनाये गये वक्र की आकृति निम्न प्रकार होगी :

(2) औसत असममितीय समंकमाला (Moderate Asymmetrical Distribution)–ऐसी समंकमालाओं में आवृत्तियों के बढ़ने-घटने का क्रम तो निश्चित होता है किन्तु बढ़ने-घटने का अनुपात समान नहीं होता है । इनसे तैयार की गयी वक्रों का आकार घटाकर नहीं होता है । ऐसे वक्रों का झुकाव दायीं और बायीं ओर होता है । इन्हें निम्न उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है :

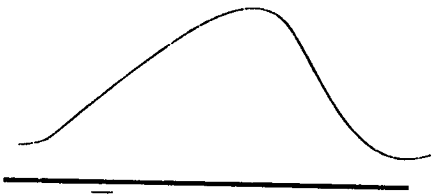
उदाहरण-11

Class :	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
f :	5	12	18	25	10	4

उदाहरण-12

Class :	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
f :	4	10	12	30	20	10	5

उपर्युक्त औसत असमितीय समंकमालाओं से सम्बन्धित वक्र क्रमशः निम्न आकृति में होंगे-



(i) $\overline{X} < M < Z$

(ii) $(Q_3 - M) < (M - Q_1)$

(B)

उदाहरण - 11

(i) $\overline{X} < M < Z$

(ii) $(Q_3 - M) < (M - Q_1)$

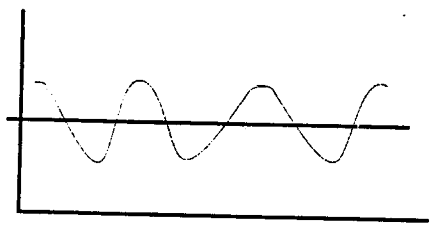
(B)

उदाहरण - 12

(3) अत्यधिक असममितीय समंकमाला (Highly Asymmetrical Distribution)–इस प्रकार की समंकमाला में आवृत्तियों के बढ़ने-घटने का न तो कोई निश्चित क्रम होता है और न कोई निश्चित अनुपात । निम्न उदाहरण से इनकी प्रकृति स्पष्ट की जा सकती है-

उदाहरण :

Class :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
f:	960	723	612	395	207	183	94	32



(Relationship between Mean, Median and Mode)
समान्तर माध्य, मध्यका तथा बहुलक में सम्बन्ध

1. एक पूर्ण सममितीय समंकमाला में समान्तर माध्य $(\overline{X})$, मध्यका (M) तथा बहुलक (Z) का मूल्य समान होता है अर्थात् x= M = Z

2. एक औसत असममितीय समंकमाला में समान्तर माध्य और बहुलक का अन्तर, सामान्यतः समान्तर माध्य और मध्यका के अन्तर का तीन गुना होता है । इसे निम्न सूत्र द्वारा दर्शाया जा सकता है :

$$\overline{X} - Z = 3(\overline{X} - M)$$

or

$$Z = 3M - 2\overline{X}$$

उपर्युक्त सूत्र की सहायता से अगर दो माध्यों का मूल्य ज्ञात हो तो तीसरे माध्य का मूल्य ज्ञात किया जा सकता है ।

समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य में सम्बन्ध

(Relationship between Arithmetic Mean, Geometric Mean and Harmonic Mean)

(1) एक समंकमाला में यदि सभी मूल्य समान हों तो उसका गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य तथा समान्तर माध्य तीनों का मूल्य भी समान होता है । इसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण :

निम्न वितरण का समान्तर माध्य, गुणोत्तर, माध्य तथा हरात्मक माध्य ज्ञात करें-

x : 2, 2, 2, 2, 2

हल :

X	log (X)	Reciprocal (X)
2	0.3010	0.5000
2	0.3010	0.5000
2	0.3010	0.5000
2	1.5050	2.5000

Arithmetic Mean :–

$$\overline{X} - \frac{\Sigma x}{N} = \frac{10}{5} = 2$$

Geometric Mean :–

$$Gm = \text{Antilog of } \frac{\Sigma \log x}{N} = \text{Antilog of } \frac{1.5050}{5}$$

$$= \text{Antilog of } 0.301$$

$$= 2.000$$

Harmonic Mean :-

$$Hm = \frac{N}{\Sigma \text{Reciprocals}} = \frac{5}{2.500} - 2$$

$$\therefore \overline{X} = Gm = Hm$$

2. किसी समंकमाला (सममित अथवा असममित) जिसके सभी पदमूल्य समान नहीं होते, में समान्तर माध्य सबसे बड़ा होता है, गुणोत्तर माध्य उसके कम तथा हरात्मक माध्य सबसे कम होता हैं, अर्थात् $\overline{X} > Gm > Hm.$ इसे निम्न उदाहरण द्वारा भी स्पष्ट किया जा सकता है-

उदाहरण :

निम्न वितरण का समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य ज्ञात करें-

X :	2	4	6	8	10
f :	5	10	15	10	5

X	f.	x.f	log x	log x.f.	Reciprocal x	Recip. x.
2	5	10	0.3010	1.5050	0.5000	2.5000
4	10	40	0.6021	6.0210	0.2500	2.5000
6	15	90	0.7782	11.6730	0.1667	2.5005
8	10	80	0.9031	9.0310	.1250	1.2500
10	5	50	1.0000	5.0000	0.1000	0.5000
	45	270		33.2300		9.2505

Arithmetic Mean :–

$$\overline{X} = \frac{\Sigma x.s}{N} = \frac{270}{45} = 6$$

Geometric Mean :–

$$Gm = \text{Antilog of } \frac{\Sigma \log.f.}{N} = \text{Antilog of } \frac{33.2300}{45}$$

= Antilog of 0.738444 = 5.48

Harmonic Mean :–

$$Hm = \frac{N}{\Sigma \text{ Reciprocal x.f.}} = \frac{45}{9.2505} = 4.86$$

$6 > 5.48 > 4.86$ अर्थात् $\overline{X} > Gm > Hm$

(3) दो संख्याओं वाली समंकमाला में समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य में निम्नलिखित सम्बन्ध पाया जाता है

$$Gm. = \sqrt{\overline{X}.\ Hm.}$$

अथवा $$Gm.^2 = \overline{X}.\ Hm.$$

अथवा $$\overline{X} = \frac{Gm^2}{Hm}$$

अथवा $$Hm = \frac{Gm^2}{\overline{X}}$$

उपर्युक्त सम्बन्ध के आधार पर किसी श्रेणी के किन्हीं दो औसतों का मान ज्ञात रहने पर तीसरे औसत का मान ज्ञात किया जा सकता है । उदाहरण के लिए अगर किसी श्रेणी का समान्तर माध्य 4.67 तथा हरात्मक माध्य 3.43 है तो उसका गुणोत्तर माध्य निम्न प्रकार ज्ञात किया जायेगा–

$$Gm^2 = \overline{X}.\ Hm$$

$$Gm = \sqrt{\overline{X}.Hm} = \sqrt{4.67 \times 3.43} = \sqrt{16.0181}$$

$$= 4.00$$

$$\therefore\ Gm = 4.$$

उपयुक्त माध्य का चुनाव

(Selection of a Suitable Average)

विभिन्न माध्यों को देखने-समझने के पश्चात स्वाभाविक प्रश्न यह उठता है कि इनमें से कौन माध्य सबसे उपयुक्त है ? हमें किस माध्य का उपयोग करना चाहिए ? इन प्रश्नों का कोई एक सर्वप्रथम स्थायी उत्तर नहीं है । उपयुक्त माध्य का चुनाव तो अनुसन्धान के उद्देश्य, आवश्यकता एवं परिस्थितियों पर निर्भर करता है । कोई माध्य किसी अनुसंधान के लिए उपयुक्त हो सकता है तो दूसरे अनुसंधान के लिए अनुपयुक्त । विभिन्न परिस्थितियों में विभिन्न प्रकार के माध्य उपयुक्त होते हैं । किसी अनुसंधान विशेष के लिए कौन सा माध्य सबसे उपयुक्त होगा इसका निर्णय करते समय निम्न बातों को ध्यान में अवश्य रखना चाहिए–

(1) अध्ययन का उद्देश्य (Object of Study)–उपयुक्त माध्य के चुनाव पर अनुसंधान के उद्देश्य का प्रभाव सबसे अधिक पड़ता है । यदि आर्थिक एवं व्यावहारिक तथ्यों का सामान्य अध्ययन करने के लिए अनुसंधान किया जा रहा है तो समान्तर माध्य अधिक उपयोगी होता है । यदि श्रेणी के सभी पदों को समान महत्व देना हो तो समान्तर माध्य तथा यदि श्रेणी के बड़े मूल्यों को कम तथा छोटे मूल्यों को अधिक महत्व देना हो तो गुणोत्तर माध्य का उपयोग उपयुक्त होता है । अनुसंधान की इकाइयों में ज्यामितीय या चक्रवृद्धि दर से परिवर्तन हो रहा हो तो गुणोत्तर माध्य सबसे उपयुक्त होता है । औसत चाल अथवा गति की जानकारी के लिए हरात्मक माध्य सबसे उपयुक्त होता है । वितरण के मध्य इकाई का पता मध्यका द्वारा ही प्राप्त किया जा सकता है । यदि श्रेणी में अधिकतम संकेद्रण बिन्दु का पता लगाना है तो बहुलक ही सबसे उपयोगी माध्य होगा ।

(2) आवृति वितरण का स्वरूप (Nature of Frequency Distribution)–यदि वितरण में पदों की संख्या बहुत कम हो तो मध्यका या बहुलक की अपेक्षा समान्तर माध्य अधिक उपयुक्त होता है । विभिन्न पदमूल्यों के बीच अन्तर बहुत अधिक होने पर समान्तर माध्य की अपेक्षा गुणोत्तर माध्य अधिक उपयुक्त होता है ।

आदर्श प्रश्न

(Model Questions)

1. हरात्मक माध्य का अर्थ स्पष्ट करें तथा इसके गुण-दोषों को लिखें ।

   Explain the meaning of Harmonic Mean and give its merits and demerits.

2. एक चालक अपनी कार प्रथम 50 कि० मी० 80 कि० मी० प्रति घंटा की चाल से, अगले 50 कि० मी० 60 कि० मी० प्रति घंटा की चाल से तथा अन्तिम 50 कि० मी० प्रति घंटा की चाल से चलाता है तौ औसत चाल (प्रति घंटा) ज्ञात कीजिये ।

3. राम की कार एक गैलन पेट्रोल में 40 कि० मी० जाती है तथा मोहन की कार एक गैलन में 60 कि० मी० जाती है ।अगर प्रत्येक 120 कि० मी० की दूरी तय करता है तो औसत रफ्तार प्रति गैलन क्या है ?

4. A किसी काम को 5 दिन में समाप्त कर सकता है, B उसे 10 दिन में व C 16 दिन में समाप्त कर सकता है । यदि तीनों बराबर-बराबर दिन काम करें तो कार्य समाप्त होने का औसत समन क्या होगा ?

5. Compute Harmonic Mean from the given frequency distributuion :

Class :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
Frequency :	8	10	6	5	3

6. (a) If $\overline{X}$ = M = 5 and Z = 50, Find out $\overline{X}$ and M.

   (b) The mean of 40 items is 17. If the mean of 10 items among them is 20 find out the mean of the rest.
7. In a moderately asymmetrical series meaqn is 15.6 and median is 15.73 find the probable value of mode.
8. The arithmetic and Geometric averages of the two characters are 15 and 12 respectively.Find the two charcters and the harmonic mean.
9. You take a trip which entails travelling 90 Kms. by traint at an average speed of 60 Kms. per hour; 3000 Kms. by boat at an average speed of 25 Kms. per hour; 400 Kms. by plane at 350 Kms. per hour and finally 15 Kms. by a taxi at 20 Kms. per hour. What is the average speed for the entire distance ?
10. Calculate Harmonic mean of the following :

    X : 20 125.6 1680.82 0.7254 0.073
11. A taxi driver from a plain **town to a hill town station,** covers 60 K.M. distance at a 10 K. M. per gallon of petrol and on the return trup at 15 K.M. per gallon. Find the harmonic rate of K.M. per gallon.
12. A man travels from Patna to Delhi at an average speed for 50 K. M. per hour and returns along the same route at an average speed of 75 K.M. per hour. Find the average speed for the entire trip.
13. Calculate the Harmonic Mean :

    15.78 15.8 1.58 0.016 0.0075 0.009.

●

पाठ-18

अपकिरण-1

(Dispersion–1)

प्रिय छात्रो,

गत पाठ में हमलोग ने 'केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न मापों' का अध्ययन किया है । केन्द्रीय प्रकृति के माप हमें समंकमाला के विभिन्न मूल्यों के बदले एक प्रतिनिधि मूल्य उपलब्ध कराते हैं जिसे देखकर श्रेणी के सभी पदमानों का अनुमान लगाया जा सकता है। किन्तु अनेक बार ऐसा देखा गया है कि श्रेणी के विभिन्न मानों के अन्तर होने के कारण केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप अपनी श्रेणी के अधिकतम मानों का प्रतिनिधित्व नहीं कर पाता । श्रेणी की बनावट आदि के सम्बन्ध में जानकारी देने में वह असफल हो जाता है । निम्न उदाहरण द्वारा इसे स्पष्ट किया जा सकता है-

X	Y	Z
10	6	20
10	8	12
10	10	8
10	12	6
10	14	4
50	50	50

उपर्युक्त उदाहरण में X, Y तथा Z तीनों समंक मालाओं का औसत समान है अर्थात् $\overline{X} = \overline{Y} = \overline{Z} = 10$ है । किन्तु औसत अर्थात् प्रतिनिधि मूल्य समान होने के बाद भी इन तीनों श्रेणियों के सम्बन्ध में समान निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता । सभी पदों का शतप्रतिशत प्रतिनिधित्व उनका औसत कर रहा है । इस औसत (10) को देखकर श्रेणी के पद-मानों के सबंध में लगाया गया अनुमान श्रेणी X के लिए शतप्रतिशत ठीक है किन्तु अन्य दोनों श्रेणियों के विषय में इस माध्य से कोई अनुमान नहीं लगाया जा सकता है । यद्यपि तीनों ही श्रेणियों के माध्य समान हैं किन्तु श्रेणी X के मूल्यों में स्थिरता है, श्रेणी Y के मूल्यों में क्रमश: वृद्धि हो रही है और श्रेणी Z के मूल्यों में क्रमश: कमी हो रही है । अत: स्पष्ट है कि माध्य श्रेणी की बनावट भिन्न-भिन्न हो सकती है । अत: केवल माध्य को देखकर श्रेणी के संबंध में निष्कर्ष निकालना उचित नहीं है । किसी तथ्य व श्रेणी के संबन्ध में पूर्ण जानकारी प्राप्त करने के लिए उसके माध्य की जानकारी तो आवश्यक है ही कुछ अन्य मापों की जानकारी भी आवश्यक होती है ताकि श्रेणी की बनावट का ज्ञान हो सके । ऐसे ही मापों में एक अपकिरण भी है ।

अपकिरण का अर्थ (Meaning of Dispresion)–अपकिरण का प्रयोग दो अर्थों में किया जाता है । प्रथम अर्थ में अपकिरण से मतलब किसी समंकश्रेणी में स्थित समंकों के बिखराव व विस्तार से है । अन्य शब्दों में हम कह सकते हैं कि अपकिरण उस सीमा को व्यक्त करता है जिसके अन्तर्गत किसी श्रेणी के पद बिखरे होते हैं । सरल शब्दों में, श्रेणी के उच्चतम एवं निम्नतम मूल्यों का अन्तर ही अपकिरण होता है । द्वितीय अर्थ में अपकिरण से तात्पर्य समंकश्रेणी के किसी माध्य से लिए गये विभिन्न पदों के विचलनों के समान्तर माध्य से है । (Dispresion is the arithmetic mean of the deviations from an average of the series.) इसे औसत विचलन (Average deviation) भी कहा जाता है । सरल शब्दों में कहा जा सकता है कि अपकिरण वह माप है जो हमें यह बताता है कि समंकश्रेणी की केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी निश्चित माप से उसके विभिन्न पदमानों की औसत दूरी (अन्तर) क्या है ।

अपकिरण की परिभाषा :

डा० ए० एल० बाउले के अनुसार, "अपकिरण पदों के विचलन का माप है" । (Dispresion is the measure of the variation of the items.)

प्रो० स्पाइगल ने लिखा है कि "The degree to which numerical data tend to spread about an average value is called the variation or dispresion of the data." अर्थात् वह सीमा जहाँ तक श्रेणी के विभिन्न समंक एक माध्य-मूल्य के दोनों ओर फैलने की प्रवृत्ति रखते हैं उसे समंकों का विचरण या अपकिरण कहते हैं ।

अपकिरण के उद्देश्य (Objects of Dispresion)

(1) समंकमाला की बनावट का ज्ञान-अपकिरण का प्रथम उद्देश्य समंकमाला की बनावट को स्पष्ट करना है । इससे यह पता चल जाता है कि आवृत्ति वितरण सममित है अथवा असममित ।

(2) माध्य की प्रतिनिधित्व क्षमता का ज्ञान-इससे इस बात का पता चलता है कि माध्य (औसत) अपनी समंकमाला के विभिन्न पदों का प्रतिनिधित्व कर रहा है अथवा नहीं । अगर प्रतिनिधित्व कर रहा है तो उसकी मात्रा क्या है ?

(3) माध्य से पदों की औसत दूरी का ज्ञान-अपकिरण यह बताता है कि समंकमाला के विभिन्न पद उसके किसी केन्द्रीय माप से औसत कितनी दूरी पर है । उसके दोनों तरफ कहाँ तक फैले हैं ।

(4) तुलनात्मक अध्ययन-अपकिरण के प्रयोग से हमें यह पता चलता है कि विभिन्न समंकमालाओं में असामानता कितनी है तथा किसमें असमानता अधिक है तथा किसमें असमानता कम है ।

उपर्युक्त बातों से स्पष्ट है कि माध्य श्रेणी के संबन्ध में अधूरी जानकारी देता है । उसकी कमी को अपकिरण पूरा करता है । इसके अभाव में केवल माध्य के आधार पर समंकमाला के संबंध में कोई निष्कर्ष निकालना उचित नहीं होता । अपकिरण के महत्व की चर्चा

करते हुए डेरेल हफ ने लिखा है, "जब वे महत्वपूर्ण संख्याएँ (अपकिरण के माप से संबन्धित) उपलब्ध न हों तब माध्य में विश्वास न करो अन्यथा तुम एक ऐसे मनुष्य की भाँति अन्धे होगे जो केवल माध्य तापमान की सूचना पर तम्बू लगाने का स्थान चुन लेता है, तुम जम सकते हो या सूख सकते हो । यदि तुम (तापक्रम के) विस्तार की अवहेलना करते हो ।"

अपकिरण मापने की विधियाँ

(Method of Measuring Dispresion)

अपकिरण के विभिन्न अर्थों के आधार पर उसे मापने की निम्नलिखित विधियाँ प्रयोग में लायी जाती हैं-

(1) सीमा विधि (Method of Limits)

- (A) विस्तार (Range)
- (B) अन्तर चतुर्थक विस्तार (Inter Quartile Range)
- (C) दशमक विस्तार तथा शतमक विस्तार (Decile Range and Percentile Range)

(2) विचलन मध्यक विधि (Method of Averaging Deviations)

- (a) चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)
  अर्द्ध अन्तर चतुर्थक विस्तार (Semi Inter-quartile Range)
- (b) औसत विचलन (Average Deviation)
- (c) प्रमाण-विचलन (Standard Deviation)

(3) बिन्दु-रेखीय विधि (Graphical Method)

लॉरिज वक्र (Lorenze Curve)

निरपेक्ष एवं सापेक्ष अपकिरण (Absolute and Relative Dispersion)–अपकिरण का माप निरपेक्ष तथा सापेक्ष दोनों रूपों में किया जा सकता है । यह समंकमाला के आकार की जानकारी देना है तथा इसे पदमाला की इकाई में ही व्यक्त किया जाता है ।

दो या दो से अधिक समंकमालाओं के बीच विचलन की दृष्टि से तुलना करने के लिए अपकिरण का निरपेक्ष माप उपयुक्त नहीं होता । इसके लिए सापेक्ष माप की आवश्यकता होती है । सापेक्ष माप समंकमाला की इकाई में व्यक्त नहीं किये जाते हैं । इन्हें अनुपात या प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है । इन्हें ज्ञात करने के लिए अपकिरण के निरपेक्ष माप में उस औसत का भाग दे देते हैं जिसकी सहायता से श्रेणी के प्रत्येक मूल्य का विचलन निकाला गया होता है । इसे अपकिरण गुणांक (Coefficient of Disspersion) कहा जाता है ।

विस्तार (Range)

विस्तार से तात्पर्य किसी समंकमाला के सबसे बड़े तथा सबसे छोटे मूल्य के बीच के अन्तर से है । यह अपकिरण मापने की सबसे सरल विधि है । किसी श्रेणी का विस्तार जैसे-जैसे बड़ा होता जाता है वैसे-वैसे उसमें असमानता है बढ़ती जाती है । विस्तार को मापने के लिए निम्न सूत्र का उपयोग किया जाता है–

$$R = L - S$$

यहाँ – R = Range, L = Largest Value तथा S = Smallest Value.

खण्डित तथा सतत समंक श्रेणियों में विस्तार ज्ञात करने के लिए उनकी आवृतियों पर ध्यान नहीं दिया जाता है । केवल चरों के न्यूनतम एवं अधिकतम मूल्यों के आधार पर विस्तार ज्ञात कर लिया जाता है ।

विस्तार का गुणांक (Coefficient of Range)–यह विस्तार सापेक्षिक माप होता है । इसे ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का उपयोग किया जाता है-

$$\text{Coefficient or Range (C,R)} = \frac{L - S}{L + S}$$

निम्न उदाहरण के द्वारा तथा विस्तार गुणांक की गणना विधि को स्पष्ट किया जा सकता है-

उदाहरण-1

Find out the range and its coefficient from the following data :

140	370	80	73	185	30	90	80	203	150

हल :

Range (R) $= L - S$

$= 370 - 30$

$= 340$

Coefficient of Range (C.R.) $= \dfrac{L - S}{L + S}$

$$= \frac{370 - 30}{370 + 30} = \frac{340}{400}$$

$= 0.85$

उदाहरण-2

निम्न समंकों से विस्तार तथा विस्तार गुणांक का मान ज्ञात कीजिये-

X :	5	10	15	20	25	30
f:	2	3	5	10	4	2

हल :

Range (R) $= L - S$

$=30 - 5$

$= 25.$

Coefficient of Range (C.R)= $\dfrac{L - S}{L + S}$

$$= \frac{30 - 5}{30 - 5} = \frac{25}{35} = 0.71$$

उदाहरण-3

Calculate the range and its Coefficient from the following frequency distribution.

Class :	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
f :	5	10	20	10	5

हल :

यहाँ - Largest Value = 60

Smallest Value = 10

अत: Range $= L - S$

$= 60 - 10$

$= 50.$

Coefficent of Range $= \dfrac{L-S}{L+S}$

$$= \frac{60-10}{60+10} = \frac{50}{70} = 0.71$$

विस्तार के गुण (Mereits of Range)

(1) यह समझने तथा गणना करने में अत्यन्त सरल है ।

(2) इसका उपयोग वस्तुओं के गुण नियंत्रण में किया जाता है । उत्पादित वस्तुएँ अगर एक निश्चित विस्तार के अन्तर्गत रहती हैं तब उन्हें स्वीकार किया जाता है अन्यथा उन्हें अस्वीकृत कर दिया जाता है ।

(3) ब्याज, दरों, विनिमय दरों, अंशों के मूल्यों तथा तापमान में परिवर्तनों आदि को मापने के लिए विस्तार का ही उपयोग किया जाता है ।

विस्तार के दोष (Demerits of Range)

(1) यह अनिश्चित माप है । यह श्रेणी के दो चरम मूल्यों पर आधारित होता है । इनमें परिवर्तन से यह परिवर्तित हो जाता है ।

(2) यह चरम मूल्यों को छोड़ श्रेणी के अन्य मूल्यों पर ध्यान नहीं देता है ।

(3) इससे श्रेणी की रचना का ठीक अन्दाज नहीं मिलता । विस्तार समान रहते हुए भी श्रेणियों की बनावट में भिन्नता हो सकती है ।

(4) आवृत्ति वितरणों में इसका उपयोग संतोषजनक नहीं होता ।

अन्तर चतुर्थक विस्तार
(Inter Quartile Range)

विस्तार मापने की यह विधि भी विस्तार के ही समान है । इसे ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम तृतीय चतुर्थक और प्रथम चतुर्थक का मान ज्ञात किया जाता है । तत्पश्चात निम्न सूत्र का प्रयोग कर अन्तर चतुर्थक विस्तार ज्ञात कर लिया जाता है-

Inter Quartle Range (I.Q.R.)=$Q_3 - Q_1$

यहाँ 1. R.= अन्तर चतुर्थक विस्तार

Q_3 = तृतीय चतुर्थक

Q_1= प्रथम चतुर्थक

Coefficient of Inter Quartile Range = $\dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

निम्न उदाहरणों के द्वारा अन्तर चतुर्थक विस्तार तथा अन्तर चतुर्थक विस्तार गुणांक की गणना विधि को स्पष्ट किया जा सकता है ।

उदाहरण-4

निम्न समंकों से अन्तर चतुर्थक विस्तार तथा उनका गुणांक ज्ञात करें ।

X : 66 58 45 48 80 72 55 78 76 79

हल :

X

45

48

55

यहाँ N = 11

$$Q_1 = \text{Value of Value If } \frac{N+1}{4} \text{th unit.}$$

58	$= \text{Value of } \frac{11+1}{4} \text{th unit}$
65	$= \text{Value of 3rd unit}$
66	$= 55$
72	$Q_3 = \text{Value of } \frac{3(N+1)}{4} \text{th unit}$
76	$= \text{Value of } \frac{3 \times 12}{4} \text{th unit}$
78	$= \text{Value of 9th unit}$
79	$= 78.$
80	

Inter Quartile range (I.Q.R.) $= Q_3 - Q_1$

$= 78 - 55 = 23$

$$\text{Eoefficient of I.Q.R.} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$= \frac{78-55}{78+55} = \frac{23}{133} = 0.173.$$

उदाहरण-5

Find the inter Quartile range and its coefficient from the following :

X :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f :	2	3	3	9	12	10	6	2	2	1

हल :

X.	f.	C.f.
1	2	2
2	3	5
3	3	8
4	9	17
5	12	29
6	10	39
7	6	45
8	2	47
9	2	49
10	1	50

$$Q_1 = \text{Value of } \frac{N+1}{4} \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } \frac{50+1}{4} \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of 12.75 th unit.}$$

12.75 वीं इकाई संचयी आवृत्ति 17 में शामिल है । अतः इसके सामने का पदमान अर्थात् 4 प्रथम चतुर्थक का मान है ।

$\therefore Q = 4$

$$Q_3 = \text{Value of } \frac{3(N+1)}{4} \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } \frac{3 \times 51}{4} \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } 38.25 \text{ th unit.}$$

जो संचयी आवृत्ति 39 में शामिल है । अतः इसके सामने का पदमान अर्थात् 6 तृतीय चतुर्थक मान है ।

$\therefore$ $Q_3 = 6$.

Inter Quartle Range $= Q_3 - Q_1$

$= 6 - 4$

$= 2.$

$$\text{Co-efficient or I.Q.R.} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{6-4}{6+4} = \frac{2}{10} = 0.2.$$

उदाहरण-6

Find 1. Q.R. and its co-efficient from the following data :

Class :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
f :	5	10	20	10	5

हल :

Class	f.	c.f.
0 – 10	5	5
10 – 20	10	15
20 – 30	20	35
30 – 40	10	45
40 – 50	5	50

(i) $$\text{Size of } Q_3 = \frac{3(N)}{4} \text{th unit.}$$

$$= \frac{3 \times 50}{4} \text{th unit.}$$

$$= 37.5 \text{ th unit.}$$

जो c.f. 45 में शामिल है अतः इससे संबंधित 30-40 ही Q_3 का वर्ग है ।

अब $$Q_3 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{f}(q_3 - C)$$

यहाँ : $l_1 = 30$, $l_2 = 40$, $f = 10$, $q_3 = 37.5$ तथा $C = 35$.

उपर्युक्त सूत्र में मान रखने पर

$$Q_3 = 30 + \frac{40-30}{10}(37.5-35)$$
$$= 30 + \frac{10}{10} \times 2.5$$
$$= 30 + 2.5 = 32.5$$

(ii) Size of $q_1 = \frac{N}{4}$th unit.

$= \frac{50}{4}$th unit = 12.5 th unit जो C.f.15 में शामिल है । अत: इससे संबंधित वर्ग 10 - 20 ही q_1 का वर्ग है ।

अब : $Q_1 = 1_1 + \frac{1_2 - 1_1}{f}(q_1 - C)$

यहाँ 1_1-1_0, 1_3=20, f=10,q_1=12.5 तथा C=5.
उपर्युक्त सूत्र में मान रखने पर

$$Q_1 = 10 + \frac{20-10}{10}(12.5-5)$$
$$= 10 + \frac{10}{10} \times 7.5$$
$$= 10 + 7.5$$
$$= 17.5$$
$$\therefore Q_1 = 17.5$$

Inter Quartile Range = Q_3–Q_1
= 32.5 – 17.5
=15

Co-efficient of I.Q.R. $= \frac{Q_3 + Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$= \frac{32.5 - 17.5}{32.5 + 17.5} = \frac{15}{50.0} = 0.3$$

अत: I.Q.R. =15
Co-eff. of I.Q.R. =0.3

अन्तर चतुर्थक के गुण (Merits of inter Quartile Range) :

(1) विस्तार की तुलना में यह अच्छा माप होता है ।

(2) यह अति सीमान्त पदों पर आधारित नहीं होता, बल्कि मध्य के 50% मूल्यों के अध्ययन के लिए उपयुक्त होता है और निम्न तथा उच्चतम चतुर्थक पर आधारित होता है ।

(3) सीमान्त पदों की अनिश्चितता का प्रभाव इस पर बहुत कम पड़ता है । यह गणना की दृष्टि से सरल माप है ।

अन्तर चतुर्थक के दोष (Demerits of Inter Quartile Range):–

(1) यह माप भी विस्तार की ही तरह श्रेणी के सभी पदों पर आधारित नहीं होता ।

(2) इससे श्रेणी की संरचना का ज्ञान नहीं होता ।

दशमक एवं शतमक विस्तार

(Decile Range and Percentile Range)

अपकिरण ज्ञात करने की यह विधि भी विस्तार तथा अन्तर चतुर्थक विस्तार के ही समान है । दशमक विभाजन मूल्यों पर आधारित है । इसके लिए नवाँ और पहला दशमक मान ज्ञात कर उनके बीच का अन्तर निकाला जाता है । इसके लिए निम्न सूत्र का उपयोग किया जाता है ।

Decile Range (D.R.) = $D_9 - D_1$

Co-efficient of Decile Range $= \dfrac{D_9 - D_1}{D_9 - D_1}$

इसी प्रकार शतमक विस्तार (Percentile range) PR = $P_{99} - P_1$

Coefficient or PR = $\dfrac{P_{99} - P_1}{P_{99} + P_1}$

यह द्रष्टव्य है कि

$$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{P_{75} - P_{25}}{P_{75} + P_{25}}$$

तथा $= \dfrac{D_9 - D_1}{D_9 + D_1} = \dfrac{P_{90} - P_{10}}{P_{90} + P_{10}}$

इसी प्रकार $Q_2 = D_5 = P_{50}$

अपकिरण के ये माप विस्तार तथा अन्तर चतुर्थक विस्तार से अधिक अच्छे माने जाते हैं ।

चतुर्थक विस्तार

(Quartile Deviation)

यह भी श्रेणी के तृतीय एवं प्रथम चतुर्थक के मूल्यों पर आधारित अपकिरण का एक माप है । यह किसी भी श्रेणी के तृतीय एवं प्रथम चतुर्थक के बीच के अन्तर का आधार होता है । इसे अर्द्ध अन्तर चतुर्थक विस्तार (Semi-Inter Quartile Range) भी कहा जाता है । इसे ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का उपयोग किया जाता है ।

Quartile Deviation (Q.D.) $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

Coefficient of Quartile Deviation $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 - Q_1}$

निम्न उदाहरणों के द्वारा इनकी गणना विधि को स्पष्ट किया जा सकता है ।

Caculate the Quartile Deviation and its coefficien from the following :

Marks :15, 20, 20, 21, 22, 24, 25, 28, 28, 29, 30, 30, 32, 33, 35

हल :

S. No.	Marks
1	15
2	20
3	20
4	21
5	22
6	22
7	24
8	25
9	28
10	28
11	20
12	30
13	32
14	33
15	35

$$Q_1 = \text{Valueof} \frac{N+1}{4} \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } \frac{15+1}{4} \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of 4th unit.}$$

$$= 21$$

$$Q_3 = \text{Value of } \frac{3(N+1)}{4} \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } \frac{3 \times 16}{4} \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of 12th unit.}$$

$$= 30.$$

$$\text{Quatile Deviation (Q.D.)} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{30-21}{2} = \frac{9}{2} = 4.5 \text{ marks.}$$

$$\text{Coefficient of Q.D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{30-21}{30+21}$$

$$= \frac{9}{15} = 0.176$$

$\therefore$ Q.D. = 4.5 marks तथा

Coeff. of Q.D. = 0.176

उदाहरण-8

Find the Quartile Deviation and its coefficient from the following data :

No. of children :	0	1	2	3	4	5	6
No. of Family :	4	6	10	15	12	9	4

हल :

No of Children	No. of Family	Cum. Frequency (c.f.)
0	4	4
1	6	10
2	10	20
3	15	35
4	12	47
5	9	56
6	4	60

$$Q_1 = \text{Value of } \frac{N+1}{4} \text{th unit}$$

$$= \text{Value of } \frac{60+1}{4} \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of 15.25 the unit.}$$

Which is included in c.f. 47. Thus $Q_3 = 4$

$$\therefore \text{Q.D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{4-2}{2}$$

$$= \frac{2}{2} = 1 \text{ child.}$$

$$\therefore \text{Co-eff. of Q.D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{4-2}{4+2} = \frac{2}{6} = .33$$

उदाहरण-9

Calculate Q.D. and its coefficient from the following distribution :

Class :	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
F :	5	10	15	10	5

हल :

Class	f.	C.f.
10 – 20	5	5
20 – 30	10	15
30 – 40	15	30
40 – 50	10	40
50 – 60	5	45

(1) First Quartile

Size of $q_1 = \frac{N}{4}$ th unit.

$= \frac{45}{4}$ th unit.

=11.25 th unit.जो संचयी आवृत्ति 15 में शामिल है । अतः इसके सामने का 20-30 ही Q_1 वर्ग है ।

$$Q_1 = 1_1 + \frac{1_2 - 1_1}{1}(q_1 - C)$$

यहाँ 1_1=20, 1_2=30, 1-10,q1=11.25 तथा C=5 है ।

$$\therefore\ Q_1 = 20 + \frac{30+20}{10}(11.25-5)$$

$$= 20 + \frac{10}{10} \times 6.25$$

$$= 26.25$$

(ii) Third Qurtile

Size of $q_3 = \frac{3(N)}{4}$ th unit.

$= \frac{3 \times 45}{4}$ th unit.

= 33.75 th unit. जो C. f. 40 में शामिल है । अतः इसके सामने का 40 - 50 हो Q_3 का वर्ग है ।

$$Q_3 = 1_1 + \frac{1_2 - 1_1}{f}(q_3 - C)$$

यहाँ $1_1 = 40,\ 1_2 = 50,\ f = 10,\ q_2 = 33.75$ तथा $C = 30$.

$$\therefore\ Q_3 = 40 + \frac{50-40}{10}(33.75-30)$$

$$= 40 + \frac{10}{10} \times 3.75$$

अब :

$$= 43.75$$

अब $Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{43.75 - 26.25}{2} = \frac{17.50}{2}$

$= 8.75$

$$\text{Co.eff of Q.D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{43.75 - 26.25}{43.75 + 26.25}$$

$$= \frac{17.50}{70.0} = 0.25$$

$\therefore$ Q.D. = 8.75 तथा Coeff. of Q.D. = 0.25

चतुर्थक विचलन के गुण (Merits of Quartile Deviation)—

(1) इसकी गणना सरल है ।

(2) इसमें सीमान्त पदों का प्रभाव विस्तार की अपेक्षा कम पड़ता है ।

(3) यह श्रेणी के मध्य भाग पर आधारित होता है । अत: वैसे तथ्यों जिनके मध्य भाग का अध्ययन करना हो, वह उपयुक्त होता है ।

चतुर्थक विचलन के दोष (Demerits of Quartile Deviation)

(1) श्रेणी के सभी पदों पर आधारित नहीं होने के कारण यह अपकिरण का उत्तम माप नहीं माना जा सकता ।

(2) सीमान्त पदों को जहाँ महत्व देना हो वहाँ यह माप उपयुक्त नहीं होता ।

(3) यह एक अस्थिर माप है । न्यादर्श में परिवर्त्तन का इसपर अधिक प्रभाव पड़ता है ।

(4) इसके आधार पर बीजगणितीय का प्रयोग करके विश्लेषण करना संभव नहीं होता है ।

●

(1) अपकिरण की परिभाषा दें तथ इसके विभिन्न मापों का वर्णन करें ।

(2) Find out range and its co-efficients of the following :

145 367 268 73 70 185 670 280 870 340

(3) Calculate range, Inter quartile range and thir co-efficients from the following :

x :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f :	6	8	6	9	8	7	5	6	3

(4) निम्न वितरण से शतमक विस्तार, चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन गुणांक की गणना कीजिये-

Class :	10 – 12	12 – 14	14 – 16	16 – 18	18 – 20	20 – 22	22 – 24
Frequency :	2	8	9	25	24	15	8

(5) Calculate Inter-Quartile Range from the following :

Class :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
f :	4	10	15	10	4

●

अपकिरण-II

(Dispersion–II)

प्रिय छात्रो,

गत पाठ में हमलोग अपकिरण के विस्तार संबंधी मापों की चर्चा कर चुके हैं । इस पाठ में हमलोग मुख्यतः औसत विचलन तथा प्रमाप विचलन की चर्चा करेंगे ।

औसत विचलन

औसत विचलन से आशय समंकामाला के किसी औसत (Mean, Median or Mode) के वास्तविक मूल्य से विभिन्न पद मूल्यों के लिये गये विचलनों के समान्तर माध्य से है । इसे माध्य विचलन (Mean deviation) भी कहा जाता है । यह अपकिरण का एक उचित माप माना जाता है । इसे प्रथम अपकिरण घात (First moment of Dispersion) भी कहा जाता है ।

इसकी गणना के लिए सर्वप्रथम दी गयी समंकमाला का समान्तर माध्य (Mean) या मध्यका (Median) या बहुलक (Mode) तीनों में से कोई एक औसत का मान ज्ञात किया जाता है । तत्पश्चात समंकमाला के प्रत्येक पदमान में से उक्त औसत को घटाकर उनका विचलन ज्ञात किया जाता है । विचलन ज्ञात करते समय (+) तथा (–) चिन्हों को ध्यान में नहीं रखा जाता है । सभी विचलनों को धनात्मक मान लेते हैं । इस प्रकार प्राप्त विचलनों का योग किया जाता है । इस योग में श्रेणी के पदों की संख्या से भाग दे दिया जाता है । प्राप्त भागफल ही उक्त श्रेणी का औसत विचलन कहलाता है ।

औसत विचलन निकालने के लिए समान्तर माध्य, मध्यका तथा बहुलक में से किसी का भी उपयोग किया जा सकता है, किन्तु अगर स्पष्ट संकेत नहीं हो तो प्रायः मध्यका का उपयोग करना उचित होता है । ऐसा इसलिए भी उचित है क्योंकि मध्यका ज्ञात करना अपेक्षाकृत सहज होता है तथा मध्यका से निकाले गये विचलनों का योग सबसे कम होता है ।

औसत विचलन को ग्रीक भाषा के वर्णाक्षर (δ) delta के साथ उस औसत का चिन्ह भी लिख दिया जाता है जिसका उपयोग विचलन ज्ञात करने में किया जाता है । इस प्रकार औसत विचलन को निम्नलिखित तीन रूपों में लिखा जा सकता है :

1. समान्तर माध्य का उपयोग करने पर – δa
2. मध्यका का उपयोग करने पर – δm
3. बहुलक का उपयोग करने पर – δz

अब हमलोग व्यक्तिगत, खण्डित तथा सतत तीनों ही श्रेणियों में इन्हें ज्ञात करने की प्रक्रिया का क्रमशः अध्ययन करेंगे ।

व्यक्तिगत श्रेणी में औसत विचलन (Average Deviation in Individual Series)–व्यक्तिगत श्रेणी में औसत विचलन ज्ञात करने के लिए निम्न प्रक्रियाओं को पूर्ण किया जाता है ।

1. सर्वप्रथम तो यह निश्चित कर लिया जाता है कि अपकिरण निकालने के लिए किस औसत का उपयोग करना है ।
2. निश्चित किये गये औसत का मान ज्ञात किया जाता है ।
3. समंकमाला के प्रत्येक पद के मान में से औसत में मान को घटाकर विचलन ज्ञात किया जाता है । विचलन लेते समय (+) तथा (–) चिन्हों को छोड़ दिया जाता है । विचलनों को (d) से व्यक्त करते हैं तथा इसके साथ संबंधित औसत का चिन्ह भी लगाते हैं ।

4. इस प्रकार प्राप्त विचलनों के योग में पदों की संख्या से भाग देकर अपकिरण का मान ज्ञात कर लिया जाता है । अलग-अलग औसतों के संबंध में अलग-अलग सूत्र का प्रयोग करते हैं जो निम्न प्रकार है :

1. विचलनों लेने में समान्तर माध्य का उपयोग करने पर-

$$\delta\bar{x} = \frac{\Sigma\bar{d}}{N}, \text{जहाँ } d\bar{x} = |X - \bar{X}|$$

2. विचलन लेने में मध्यका का उपयोग करने पर-

$$\delta m = \frac{\Sigma dM}{N}, \text{ जहाँ } dM = |x - M|$$

3. विचलन लेने में बहुलक का उपयोग करने पर-

$$\delta z = \frac{\Sigma dz}{N}, \text{जहाँ } dz = |X - Z| = |X - \text{Mode}|$$

औसत विचलन गुणांक (Co-efficient of Average Deviation)–औसत विचलन गुणांक को ज्ञात करने के लिए औसत-विचलन निरपेक्ष माप में उसी औसत से भाग लगा दिया जाता है जिसका उपयोग विचलन लेने में किया गया होता है । इसके लिए निम्न सूत्र उपयोग किया जाता है-

Co-efficient of	Mean	Median	Mode
Average Deviation	$= \dfrac{\delta\bar{x}}{X}$	$\dfrac{\delta m}{M}$	$\dfrac{\delta z}{Z}$

निम्न उदाहरण से इनकी गणना क्रिया को स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण-1

निम्न समंकों का δa, $\delta m, \delta z$ तथा उनका गुणांक ज्ञात कीजिये ।

X : 20 20 25 35 40 40 58 64

हल :

Calculation to δa, δM, and δz

X	|da|	|dM|	|dZ|
20	18	20	20
20	18	20	20
25	13	15	15
35	3	5	5
40	2	0	0
40	2	0	0
40	2	0	0
58	20	18	18
64	26	24	24
$\Sigma x = 342$	$\Sigma da = 104$	$\Sigma dM = 102$	$\Sigma dz = 102$

यहाँ सर्वप्रथम तीनों औसतों अर्थात Mean, Median तथा Mode का मान ज्ञात किया जायेगा ।

a या $X = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{342}{9} = 38$

$M = \text{Value of } \frac{N+1}{2} \text{th unit}$

$= \text{Value of } \frac{9+1}{2} \text{ th unit.}$

$= \text{Value of 5th unit.}$

$= 40$

Z=40 क्योंकि दी गई समंकमाला में 40 की आवृत्ति सबसे अधिक है । अतः यही इस श्रेणी का सबसे अधिक लोकप्रिय मान है ।

(i) $\delta a = \frac{\Sigma da}{N} = \frac{104}{9} = 11.56$

(ii) $\delta M = \frac{\Sigma dM}{N} = \frac{102}{9} = 11.33$

(iii) $\delta z = \frac{\Sigma dz}{N} = \frac{102}{9} = 11.33$

Calculation of coefficientsof δ a, δ M and δ z

(i) Coefficient of $\delta a = \frac{\delta a}{a} = \frac{11.56}{38} = 0.304$

(ii) Coefficient of $\delta M = \frac{\delta M}{M} = \frac{11.33}{40} = 0.283$

(iii) Coefficient of $\delta z = \frac{\delta z}{z} = \frac{11.33}{40} = 0.283$

खण्डित श्रेणी में औसत विचलन (Average Deviation in Discrete Seris)–खण्डित श्रेणी में औसत विचलन ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित प्रक्रियाएँ पूर्ण की जाती हैं :

1. सर्वप्रथम तो औसत व माध्य ज्ञात किया जाता है जिसकी मदद से विचलन ज्ञात करना होता है ।
2. समंकमाला के प्रत्येक पदमान में से औसत का मान घटाकर विचलन (d) ज्ञात किया जाता है ।
3. प्रत्येक पद के विलचन को तत्संबंधी आवृत्ति से गुणा करके गुणनफलों का योग ($\Sigma f.d$) ज्ञात किया जाता है ।
4. अंत में निम्न सूत्र का उपयोग करके अपकिरण ज्ञात कर लिया जाता है । समान्तर माध्य से विचलन लेने पर

$$\delta a = \frac{\Sigma f.da}{N}$$

मध्यका (Median) से विचलन लेने पर

$$\delta a = \frac{\Sigma f.dm}{N} \text{ तथा}$$

निम्न उदाहरण के द्वारा इनकी गणना विधि को स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण-2

निम्न वितरण का माध्य विचलन तथा उसका गुणांक ज्ञात करें :

x :	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f :	9	6	2	2	2	4	3	3	2	3

हल :

चूँकि प्रश्न में यह स्पष्ट नहीं किया गया है कि माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए किस माध्य (औसत) का उपयोग करना है . अत: यह मध्यका (Median) का इस्तेमान करना उपयुक्त होगा ।

Calculation of Average Deviation from Median. (δ M)

x	f	Cumulative Frequency (cf)	(x– M) dm/M=5	f.M.
2	9	9	3	27
3	6	15	2	12
4	2	17	1	2
5	2	19	0	0
6	2	21	1	2
7	4	25	2	8
8	3	28	3	9
9	3	31	4	12
10	2	33	5	10
11	3	36	6	18
	$\Sigma f = 36$			$\Sigma fdM = 100$

$$M = \text{Value of } \frac{N+1}{2} \text{th unit.}$$

$$= \text{Value of } \frac{36+1}{2} \text{th unit.}$$

= Value of 18.5 th unit. जो संचयी आवृत्ति 19 में शामिल है । अत: इसके सामने का मान 5 ही मध्यका मान है ।

$\therefore$ M = 5

$$\delta M = \frac{\Sigma f.dM}{N} = \frac{100}{36} = 2.78$$

Coefficient of $\delta M = \frac{\delta M}{M} = \frac{2.78}{5} = 0.556$

सतत श्रेणी में औसत विचलन (Average Deivation in Continuous Series)–सतत श्रेणी में औसत विचलन ज्ञात करने की विधि वही है जो खण्डित श्रेणी के लिए अपनायी जाती है । दोनों में अन्तर मात्र इतना ही है कि सतत श्रेणी में विचलन प्रत्येक वर्ग के मध्य मूल्यों से लिया जाता है । निम्न उदाहरण से वस्तुस्थिति पूर्णतः स्पष्ट हो जा सकती है-

उदाहरण-3

Class:	f	C.f.	Mid-Points	X–M =dM M = 35	f.dM	
10 – 20	10	10	15	20	200	
20 – 30	20	30	25	10	200	
30 – 40	30	60	35	0	0	
40 – 50	20	80	45	10	200	
50 – 60	10	90	55	20	200	
	$\Sigma f = 90$				$\Sigma fdM = 800$	

Calculation of Median :–

$$\text{Size of m} = \frac{N}{2}\text{th unit.}$$

$$= \frac{90}{2}\text{th unit or 45th unit.}$$

45th unit. C.f. 60 में शामिल है । अतः इसके सामने लिखित 30-40 ही मध्यका वर्ग है ।

अब :

$$M = l_1 + \frac{l_3 - l_1}{f}(m - c)$$

यहाँ 1_1=30, J_2=40, f=30, m=45 तथा c=30.

सूत्र में मान रखने पर

$$M = 30 + \frac{40 + 30}{30}(45 - 30)$$

$$= 30 + \frac{10}{30} \times 15$$
$$= 30 + 5$$
$$= 35.$$

$$\Sigma M = \frac{\Sigma fdM}{N} = \frac{800}{90} = 8.89$$

$$\text{Coefficient of } \delta M = \frac{\delta M}{M} = \frac{8.89}{35} = 0.254$$

औसत व माध्य विचलन के गुण (Merits of average or Mean Deviation)–

(1) अपकिरण का यह एक उत्तम कोटि का माप है । यह समंकमाला के सभी मूल्यों पर आधारित होता है ।

(2) यह गणना करने तथा समझने में सरल है ।

(3) श्रेणी के चरम मूल्यों का इस पर कम प्रभाव पड़ता है ।

(4) यह तीनों में से किसी भी औसत द्वारा निकाला जा सकता है ।

औसत व माध्य विचलन के दोष (Demerits of Average or Mean Deviation)–

(1) यह गणितीय दृष्टिकोण से उचित माप नहीं है क्योंकि इसमें विचलन लेते समय (+) तथा (−) चिन्हों का महत्व नहीं दिया जाता है ।

(2) विभिन्न औसतों से ज्ञात किये जाने के कारण इसमें अनिश्चितता का दोष पाया जाता है ।

(3) इसमें समान्तर माध्य, मध्यका तथा बहुलक को समान महत्व दिया जाता है जबकि सामान्यत: समान्तर माध्य को सबसे श्रेष्ठ औसत माना जाता है । कभी-कभी तो बहुलक का मान निकाला ही नहीं जा सकता । ऐसी स्थिति में इसकी गणना ही असम्भव हो जाती है ।

प्रमाप विचलन
(Standard Deviation)

प्रमाप विचलन अपकिरण का सर्वोत्तम माप है । इसे मानक विचलन भी कहा जाता है । इसमें औसत विचलन की सभी कमियों जैसे (+) तथा (−) को छोड़ा जाता तथा औसतों का उपयोग आदि को समाप्त कर दिया जाता है । इसकी गणना के लिए केवल सर्वश्रेष्ठ औसत अर्थात् समान्तर माध्य का ही उपयोग किया जाता है तथा विचलन लेते समय (+) तथा (−) को रखा जाता है । प्रमाप विचलन किसी समंकमाला के समान्तर माध्य से उसके विभिन्न चल मूल्यों तक के लिए गये विचलनों के वर्ग के समान्तर माध्य वर्गमूल होता है । (Standard Deviation is the square root of the arithmetic mean of the squared deviation, measured from the various values of statistical series.) ।

प्रमाप विचलन का उपयोग उच्चतर सांख्यिकीय अध्ययन में किया जाता है । इसे द्वितीय घात का अपकिरण (Second Moment of Dispersion) भी कहा जाता है । क्योंकि यह विचलनों के वर्ग पर आधारित होता है ।

प्रमाप विचलन को (−) चिन्ह द्वारा दर्शाया जाता है । प्रमाप विचलन ज्ञात करने की विधि को सर्वप्रथम कार्ल पियर्सन नामक सांख्यिक ने 1893 में प्रतिपादित किया ।

प्रमाप विचलन की गणना (Calculation of Standard Deviation)–विभिन्न समंक श्रेणियों में प्रमाप विचलन ज्ञात करने की विधि निम्न प्रकार है-

व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series)–इस श्रेणी में प्रमाप विचलन ज्ञात करने की निम्नलिखित दो विधियाँ उपयोग में लायी जाती हैं ।

(A) प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)–इस विधि में प्रमाप विचलन निकालने के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया अपनायी जाती है–

1. सर्वप्रथम समंकमाला का समान्तर माध्य ज्ञात किया जाता है ।
2. प्रत्येक पदमूल्य में से समान्तर माध्य को घटाते हुए विचलन $(d\bar{x})$ ज्ञात किया जाता हैं । विचलन लेते समय (+) तथा (–) चिन्हों को रखा जाता है ।
3. इस प्रकार प्राप्त विचलनों का वर्ग निकाल कर वर्गों का योग (Σdx^2) ज्ञात कर लिया जाता है, और अन्तर में
4. निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करके प्रमाप विचलन ज्ञात कर लिया जाता है :

$$\text{Standard Deviation } (—) = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{N}}$$

(B) लघु विधि (Short-cut Method)–इस विधि मे प्रमाप विचलन की गणना करने में निम्न प्रक्रियाएँ सम्पन्न की जाती हैं :

1. समंकमाला के वास्तविक समान्तर माध्य की गणना नहीं की जाती है बल्कि किसी कल्पित संख्या को श्रेणी का माध्य मान लिया जाता है । इस कल्पित माध्य को (A) से व्यक्त किया जाता है ।
2. कल्पित माध्य के सभी पदमानों से विचलन लिये जाते हैं जिसे (dA) द्वारा व्यक्त करते हैं । इस प्रकार प्राप्त विचलनों का योग (ΣdA) ज्ञात कर लिया जाता है ।
3. ऊपर प्राप्त किये गये विचलनों का वर्ग करके वर्गों का योग (Σd^2A) प्राप्त कर लिया जाता है ।
4. अन्त में निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करके प्रमाप विचलन ज्ञात कर लिया जाता है ।

$$\text{Standard Deviation } (—) = \sqrt{\frac{\Sigma d^2A}{N} - \left(\frac{\Sigma dA}{N}\right)^2}$$

निम्न उदाहरण की मदद से उपर्युक्त विधियों की गणना रीति को स्पष्ट किया जा सकता है ।

उदाहरण-4. निम्नलिखित समंकों का प्रमाप विचलन प्रत्यक्ष तथा लघु रीतियों से ज्ञात करें ।

X : 20 20 25 35 40 40 40 58 64

हल :

Calculation of Standard Deviation

Direct Method			Short-cut Method		
X	da/a-38	d^2a	X	dA/A=40	$(dA)^2$
20	–18	324	20	–20	400
20	–18	324	20	–20	400
25	–13	169	25	–15	225
35	–3	9	35	–5	25
40	+2	4	40	0	0
40	+2	4	40	0	0
40	+2	4	40	0	0
58	+20	400	58	+18	324
64	+26	676	64	+24	576
$\Sigma X = 342$		$\Sigma d^2a = 1914$		$\Sigma dA = 18$	$\Sigma d^2A = 1950$

Direct Method :–

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{349}{9} = 38$$

$$-\sqrt{\frac{\Sigma d^2 a}{n}} = \sqrt{\frac{1914}{9}} = \sqrt{212.66} = 14.58$$

Short-cut Method :–

कल्पना किया कि श्रेणी का माध्य (A) = 40

$$— = \sqrt{\frac{\Sigma d^2 a}{N} - \left(\frac{\Sigma dA}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1950}{9.} - \left(\frac{-18}{9}\right)^2}$$

= 14.58

खण्डित श्रेणी में प्रमाप विचलन (Standar Deviation in Descrete Series)–खण्डित श्रेणी में भी प्रमाप विचलन ज्ञात करने की दो विधियाँ (i) प्रत्यक्ष विधि और (ii) लघु विधि हैं ।

प्रत्यक्ष विधि (Direct method)–इस विधि से खण्डित श्रेणी में प्रमाप विचलन ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित प्रक्रियाएँ सम्पन्न की जाती हैं :

(1) सर्वप्रथम दी गयी समंकमाला का समान्तर माध्य ज्ञात किया जाता है ।

(2) श्रेणी के प्रत्येक मूल्य से समान्तर माध्य से विचलन $(d.\overline{x})$ लिया जाता है तथा विचलनों का वर्ग $(d^2.\overline{x})$ निकाल लिया जाता है ।

(3) विचलन वर्गों का उनसे संबंधित आवृत्तियों से गुणा करके गणनफलों का योग $(\Sigma f.d.\overline{x})$ ज्ञात कर लिया जाता है ।

(4) अन्त में निम्न सूत्र का उपयोग करके प्रमाप विचलन ज्ञात कर लिया जाता है :

$$— = \sqrt{\frac{\Sigma f.d^2x}{N}} \text{ या } — = \sqrt{\frac{\Sigma f.d^2x}{N}}$$

(ii) **लघु विधि (Short-cut Method)**–खण्डित श्रेणी में लघु विधि का उपयोग करके प्रमाप विचलन ज्ञात करने के लिए निम्न प्रक्रियाएँ पूरी की जाती हैं ।

(1) श्रेणी में उपस्थित अथवा अनुपस्थित किसी मूल्य को कल्पित समान्तर माध्य (A) मान लिया जाता है ।

(2) इसी कल्पित माध्य (A) से प्रत्येक पदमूल्य का विचलन ज्ञात किया जाता है ।

(3) विचलनों को तत्संबंधी आवृत्तियों से गुणा करके गुणनफलों का योग $(\Sigma f.dA)$ ज्ञात कर लिया जाता है ।

(4) ऊपर प्राप्त विचलन एवं आवृत्तियों के गुणनफलों अर्थात् f.d.A को पुन: तत्संबंधी विचलनों से गुणा करके $(f.d^2A)$ प्राप्त किया जाता है और इस कालम का योग अर्थात् Σfd^2A ज्ञात कर लिया जाता है ।

(5) अन्त में निम्न सूत्र का उपयोग करके प्रमाप विचलन ज्ञात कर लिया जाता है :

$$- = \sqrt{\frac{\Sigma f.d^2A}{N} - \left(\frac{\Sigma f.d.A}{N}\right)^2}$$

निम्न उदाहरण से इनको और स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण-5

निम्नलिखित समंकों को प्रमाप विचलन प्रत्यक्ष तथा लघु रीतियों से ज्ञात करें ।

X :	2	3	4	5	6	7	8
f :	5	9	11	15	10	3	2

(i) Calculation of Standard Deviation by Direct Method

X	f.	f.x	$(x-\bar{x})$ $dx/x = 4.6$	$d^2\bar{x}$	$f.d^2\bar{x}$
2	5	10	−2.6	6.76	33:80
3	9	27	−1.6	2.56	23.04
4	11	44	−0.6	0.36	3.96
5	15	75	+0.4	0.16	2.40
6	10	60	+1.4	1.96	19.60
7	3	21	+2.4	5.76	17.28
8	2	16	+3.4	11.56	23.12
	55	253			123.20

$$\bar{X} = \frac{\Sigma f.x}{N} = \frac{253}{55} = 4.6$$

$$- = \sqrt{\frac{\Sigma f.dx}{N}} = \sqrt{\frac{123.2}{55}} = \sqrt{2.24 \text{ or } 1.5} = 1.4966$$

Calculation of Standard Deviation by Short-cut Method

X	f.	(X–A) dA/A=4	f.d.A	(dA x fdA) f.d²A	
2	5	−2	−10	20	
3	9	−1	−9	9	
4	11	0	0	0	
5	15	+1	+15	15	
6	10	+2	+20	40	
7	10	+3	+9	27	
8	2	+4	+3	32	
	55		+33	143	

मान लिया कि उपर्युक्त श्रेणी की माध्य (A) = 4

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{342}{9} = 38$$

$$- = \sqrt{\frac{\Sigma d^2 A}{N} - \left(\frac{\Sigma fdA}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{143}{55} - \left(\frac{33}{55}\right)^2} = \sqrt{2.6 - 0.36}$$

$$= \sqrt{2.24} = 1.49666 \text{ or } 1.5.$$

सतत श्रेणी में प्रथम विचलन (Standard Deviation in Continuous Series)–इस श्रेणी में प्रमाप विचलन निकालने के निम्न तीन तरीके हैं :

(i) प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)–

(ii) लघु विधि (Short-cut Method)

(iii) पद विचलन विधि (Step-Deviation Method)

(i) **प्रत्यक्ष विधि**–सतत् श्रेणी में प्रत्यक्ष विधि के प्रमाप विचलन निकालने के लिए उन्हीं प्रक्रियाओं को सम्पन्न किया जाता है जिनकी चर्चा हमलोग खण्डित श्रेणी में प्रत्यक्ष विधि से प्रमाप विचलन निकालने के क्रम में कर चुके हैं । अन्तर मात्र यही है कि सतत् श्रेणी में माध्य से विचलन लेने के लिए वर्गों के मध्य मूल्य का उपयोग किया जाता है । निम्न उदाहरण से वस्तुस्थिति पूर्णतः स्पष्ट हो जायेगी :

उदाहरण-6

निम्न वितरण का प्रमाप विचलन प्रत्यक्ष विधि से ज्ञात करें :

Class :	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
f :	10	20	30	20	10

हल :

निम्न वितरण श्रेणी में प्रत्यक्ष विधि के प्रमाप विचलन निकालने के लिए उन्हीं प्रक्रियाओं को सम्पन्न किया जाता है, जिनकी चर्चा हमलोग खण्डित श्रेणी में प्रत्यक्ष विधि से प्रमाप विचलन निकालने के क्रम में कर चुके हैं । अन्तर मात्र यही है कि सतत् श्रेणी में माध्य से विचलन लेने के लिए वर्गों के माध्य मूल्य का उपयोग किया जाता है । निम्न उदाहरण से वस्तुस्थिततति पूर्णतः स्पष्ट हो जायेगी :

उदाहरण-6

निम्न वितरण का प्रमाप विचलन प्रत्यक्ष विधि से ज्ञात करें :

Class :	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
f :	10	20	30	20	10

हल :

Calculation of Standard Deviation by Direct Method

(i) Class	(ii) f	(iii) M.v(x)	iv=(iixiii) f.x.	(iii-X)=v da/35	vi=(v×v) d^2a	vii=(vixii) $f.d^2a$
10 – 20	10	15	150	– 20	400	4000
20 – 30	20	25	500	– 10	100	2000
30 – 40	30	35	1050	0	0	0
40 – 50	20	45	900	+ 10	100	2000
50 – 60	10	55	550	+ 20	400	4000
	90		3150	0	1000	12000

$$x \text{ or } a = \frac{\Sigma f.x}{N} = \frac{3150}{90} = 35$$

$$- = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2a}{N}} = \sqrt{\frac{12000}{90}} = 11.547 \text{ or } 11.55$$

(ii) **लघु विधि**-लघु विधि से प्रमाप विचलन निकालने की क्रिया सतत् एवं खण्डित दोनों ही श्रेणियों में समान है । खण्डित श्रेणी की चर्चा हमलोग पीछे कर चुके हैं । दोनों में अन्तर केवल इतना ही है कि सतत् श्रेणी में कल्पित माध्य से विचलन वर्गों के माध्य मान से लिया जाता है । निम्न उदाहरण से इस विधि की गणना प्रक्रिया तथा सरलता का स्पष्ट भान हो जायेगा :

उदाहरण-7

पूर्ण के उदाहरण संख्या 6 में दिये गये समंकों का प्रमाप विचलन लघु रीति से निकालें ।

हल :

Cacluation of Standard Deiation by Short-cut-Method

Class	f	Mid value	dA/45	fdA	f.d²x
10 – 20	10	15	– 30	– 300	9000
20 – 30	20	25	– 20	– 400	8000
30 – 40	30	35	– 10	– 300	3000
40 – 50	20	45	0	0	0
50 – 60	10	55	+ 10	+ 100	1000
	$\Sigma f = 90$			$\Sigma fdA = -900$	$\Sigma fd^2A = 21000$

यहाँ कल्पित माध्य (A)= 45 माना गया है ।

$$- = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2A}{N} - \left(\frac{\Sigma fdA}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{2100}{90} - \left(\frac{-900}{90}\right)^2}$$

$$= \sqrt{233.33 - 100} = \sqrt{133.33} = 11.5466 \text{ or } 11.55$$

(iii) पद विचलन विधि-इन विधि के उपयोग से प्रमाप विचलन की गणना क्रिया अत्यन्त सरल हो जाती है । इस विधि का प्रयोग केवल समान वर्गान्तर वाली सतत् श्रेणी में ही किया जाता है किन्तु अगर खण्डित श्रेणी के सभी पदमूल्य समान अन्तर पर दिये हुए हों तो प्रमाप विचलन निकालने के लिए खण्डित श्रेणी में भी इस विधि का उपयोग किया जा सकता है । इस विधि की गणना क्रिया निम्न प्रकार है :

1. सर्वप्रथम कल्पित माध्य से विचलन (dA) निकाल लिया जाता है ।
2. विचलनों में वर्गान्तराल के मान से भाग देकर (dA÷i) भागफल (d^1A) प्राप्त कर लिया जाता है ।
3. ऊपर प्राप्त भागफलों अर्थात् (d^1A) को इससे संबंधित आवृत्ति (f) से गुणा करके (fdf^1A) ज्ञात कर लिया जाता है ।
4. fd^1A को d^1A से गुणा करके $f(d^1A)^2$ प्राप्त करके उनका योग $\Sigma f(d^1A)^2$ ज्ञात कर लिया जाता है ।

5. अन्त में निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करके प्रमाप विचलन ज्ञात कर लिया जाता है :

$$- = i \times \sqrt{\frac{\Sigma f d^1 A^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f d^1}{N}\right)^2}$$

यहाँ i = वर्ग विस्तार (सतत् श्रेणी में) अथवा

i = खण्डित चरों के बीच का समान अन्तर (खण्डित श्रेणी में)

निम्न उदाहरण द्वारा सतत् श्रेणी में पद विचलन विधि का उपयोग स्पष्ट किया जा सकता है ।

उदाहरण-8. उदाहरण संख्या 6 में दिये गये आंकड़ों का पदविचलन विधि से प्रमाप विचलन ज्ञात करें ।

हल :

पद विचलन विधि से प्रमाप विचलन की गणना

Class	f	M.V.	dA/45	$d^1A/i=10$	fd^1	$f.d^1A^2$
10 – 20	10	15	– 30	– 3	– 30	90
20 – 30	20	25	– 20	– 2	– 40	80
30 – 40	30	55	– 10	– 1	– 30	30
40 – 50	20	45	0	0	0	0
50 – 60	10	55	+ 10	+ 1	+ 10	10
	$\Sigma f = 90$		Σd	$\Sigma d^1A = -5$	$\Sigma d^1A = -90$	$\Sigma f d^1 A^1 = 210$

यहाँ कल्पित माध्य (A)=45 है । तथा i =10 है ।

$$- = \sqrt{\frac{\Sigma f d^1 A^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f d^1}{N}\right)^2}$$

$$= 10\sqrt{\frac{210}{90} - \left(\frac{-90}{90}\right)^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{2.33 - 1} = 10 \times \sqrt{1.3333} = 10 \times 1.1546$$

$$= 11.546 \text{ or } 11.55$$

विचरण गुणांक (Coefficient of Variation)–अपकिरण के अन्य मापों की तरह ही प्रमाप विचलन का गुणांक ज्ञात करने के प्रमाप विचलन के मान में समान्तर माध्य के मान से भाग दे दिया जाता है ।

यह प्रमाप विचलन का सापेक्षिक माप होता है । यह समंकमालाओं के मध्य तुलनात्मक अध्ययन के लिए उपयोग में लाया जाता है। इसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है :

$$\text{Coefficient of Variation} = \frac{-}{\bar{X}} \text{ या } \frac{-}{a}$$

विचरण-गुणांक (Coefficient of Variation) को प्रतिशत के रूप में भी व्यक्त किया जाता है । इसे संक्षेप में C of V या CV. द्वारा भी दर्शाया जाता है । इसके लिए निम्नलिखित सूत्र का उपयोग किया जाता है ।

$$C.V. = \frac{=}{\overline{X}} \times 100$$

विचरणांक (Variance)–इसे अपकिरण का द्वितीय घात कहा जाता है । प्रमाप विचलन का वर्ग होता है । दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि प्रमाप विचलन के सूत्र में से अगर root हटा दिया जाय तो विचरणांक प्राप्त हो जाता है । इसके लिए निम्न सूत्रों का इस्तेमाल किया जाता है ।

Individual Series

Direct Method :

$$\text{Variance} = \frac{\Sigma d^2 a}{N}$$

Short-cut Method :

$$\text{Variance} = \frac{\Sigma d^2 a}{N} - \left(\frac{\Sigma fdA}{N}\right)^2$$

Discrete or Continuos Series

Direct Method :

$$\text{Variance} = \frac{\Sigma d^2 a}{N}$$

Short-cut Method :

$$\text{Variance} = \frac{\Sigma fd^2 A}{N} - \left(\frac{\Sigma dA}{N}\right)^2$$

प्रमाप विलचन ज्ञात रहने पर

Variance =—^{2}

$$\therefore -\sqrt{\text{Variance}}$$

प्रमाप विचलन के गुण (Merits of Standard Deviation) :

(1) यह अपकिरण का सर्वश्रेष्ठ माप है । यह श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता है । अपनी गणितीय विशेषताओं के कारण इसका उपयोग उच्च गणितीय अध्ययनों में व्यापक रूप से किया जाता है ।

(2) निदर्शन के उच्चावचनों का इस पर न्यूनतम प्रभाव पड़ता है ।

(3) यह एक स्पष्ट माप है । हर परिस्थिति में इसे ज्ञात किया जा सकता है । दो या अधिक समंकमालाओं का सामूहिक प्रमाप विचलन भी ज्ञात किया जा सकता है ।

(4) प्रमाप विचलन की सहायता से अन्य सांख्यिकीय अध्ययन सम्भव हो पाते हैं जैसे-विषमता, सहसंबंध, सार्थकता, परीक्षण, प्रसामान्य वक्र के अधीनस्थ क्षेत्रफल का ज्ञान इत्यादि ।

प्रमाप विचलन के दोष (Demerits of Standard Deviation) :

(1) गणना एवं समझने की दृष्टि से यह कुछ कठिन है ।

(2) समान्तर माध्य की ही तरह यह भी चरम मूल्यों से अधिक प्रभावित होता है ।

(3) समान्तर माध्य के निकटतम पदों को कम तथा दूर के पदों को अधिक महत्व देता है ।

आदर्श प्रश्न
(Model Questions)

(1) प्रमाप विचलन क्या है ? अपकिरण के एक माप के रूप में प्रमाप विचलन के गुण-दोषों का वर्णन कीजिये ।

(2) निम्न समंकों से औसत (मध्यका से) तथा माप विचलन एवं उनके गुणांकों की गणना करें ।

47, 12, 76, 73, 115, 19, 37, 48, 84, 42, 51

(3) The Prices of two commodities, A and B, during the last ten weeks in a market are given below. in rupees. Calculate standard deviation and state which one is more variable.

A–28	41	40	38	35	33	40	32	36	33
B–23	34	33	34	30	26	28	31	36	38

(4) निम्न आवृत्ति वितरण का माध्य विचलन (समान्तर माध्य से) तथा प्रमाप विचजन ज्ञात करें :

x :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f :	5	7	8	10	15	20	10	5	4	2

(5) Compute average deviation from median and its coefficient from the following data :

M. V. :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frequency :	2	8	10	15	20	25	20	10	5	2

(6) Calculate coefficient of varation from the following data :—

Age-groups (less than) :	10	20	30	40	50	60	70
Population (in lakh) :	10	25	36	80	91	95	105

(7) किसी कारखाने में मजदूरी वितरण से संबंधित निम्न आँकड़ों का प्रमाप विचलन तथा उसका गुणांक ज्ञात करें ।

Daily wages (in Rs.) :	25	35	45	55	65
No. of workers :	60	105	100	80	70

(8) नीचे दो बल्लेबाजों की रन संख्या दी गयी है । बताइये कौन बल्लेबाज अधिक स्थिर है ?

A :	12	115	10	73	20	18	120	40	80	50
B :	40	12	70	50	4	50	38	47	10	5

पाठ-20

सामूहिक प्रमाप विचलन एवं विषमता

(Combined Standard Deviation And Skewness)

प्रिय छात्रों,

पिछले पाठ में हमलोग प्रमाप विचलन के साथ सामूहिक प्रमाप विचलन की चर्चा नहीं कर सके । अत: इस पाठ में सर्वप्रथम हमलोग सामूहिक प्रमाप विचलन (Combined Standard Deviation) की चर्चा करेंगे और उसके पश्चात् विषमता (Skewness) की चर्चा करेंगे ।

सामूहिक प्रमाप विचलन

(Combined Standard Deviation)

सामूहिक माध्य की ही तरह दो या दो से अधिक समंकमालाओं का सामूहिक प्रमाप विचलन भी निकाला जा सकता है । अगर विभिन्न श्रेणियों के प्रमाप विचलन, समान्तर माध्य तथा पदों की संख्या ज्ञात हों तो उनकी सहायता से सरलतापूर्वक उनका सामूहिक प्रमाप विचलन $(-_{12})$ निकाला जा सकता है । सामूहिक प्रमाप विचलन निकालने के लिए निम्नलिखित प्रक्रियाएँ सम्पन्न करनी पड़ती हैं-

(1) सर्वप्रथम सभी समंकमालाओं का सामूहिक समान्तर माध्य $(\bar{X}_{12})$ ज्ञात किया जाता है ।

(2) प्रत्येक समंकमाला के व्यक्तिगत समान्तर माध्य में से सामूहिक माध्य $(\bar{X}_{12})$ को घटाकर अन्तर (D) निकाला जाता है । जतनी समंकमालाएँ होती हैं उतने अन्तर (D) ज्ञात कर लिये जाते हैं ।

(3) अन्त में निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करके सामूहिक प्रमाप विचलन $(-_{12})$ ज्ञात कर लिया जाता है ।

$$\text{Combined S. D. } (-_{12}) = \sqrt{\frac{N_1(-1^1+D_1^{\,2})+N_2(-2^2+D2^2)+\ldots}{N_1+N_2+\ldots..}} \text{ क}$$

N_1, N_2 = अलग-अलग समंकमाला में पदों की संख्या

—1, —2= प्रत्येक समंकमाला का व्यक्तिगत प्रमाप विचलन

D_1, D_2= प्रत्येक समंकमाला के माध्य का सामूहिक माध्य से अन्तर $(D_1 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_{12})_2 \;\; D_2 = (\bar{X}_2 - \bar{X}_{12})$

निम्न उदाहरण से सामूहिक प्रमाप विचलन की गणना विधि को स्पष्ट किया जा सकता है ।

उदाहरण-1

दो श्रेणियों A और B से संबन्धित नीचे दी गयी सूचनाओं के आधार पर उनका सामूहिक प्रमाप विचलन ज्ञात करें :

	A	B
$\bar{X}$	10	15
—	2	3
N	20	25

हल :

(i) Calculation of Combined Mean $(\overline{X}_{12})$

$$(\overline{X}_{12}) = \frac{(N_1.\overline{X}_1) + (N_2.\overline{X}_2)}{N_1 + N_2}$$

यहाँ $(\overline{X}_{12})$ = दोनों श्रेणियों (A तथा B) का सामूहिक माध्य ।

इसे $\overline{X}$ AB द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है ।

N_1 = श्रेणी A में पदों की संख्या ।

$\overline{X}_1$ = श्रेणी A का समान्तर माध्य ।

N_2 = श्रेणी B में पदों की संख्या ।

$\overline{X}_2$ = श्रेणी B का समान्तर माध्य ।

सूत्र में मान रखने पर :

$$\overline{X}_{12} = \frac{(20 \times 20) + (25 \times 15)}{20 + 25} = \frac{200 + 375}{45}$$

$$= \frac{575}{45} = 12.8$$

(ii) Calculation of Difference $(\overline{X}_1 - \overline{X}_{12})$

$D_1 = \overline{X}_1 - \overline{X}_{12}$ or 10 - 12.8 = -2.8

$D_2 = \overline{X}_2 - \overline{X}_{12}$ or 15 - 12.8 = 2.2

(iii) Calculation of $-_{12}$

$$-_{12} = \sqrt{\frac{N_1(-1^2 + D2^2) + N_2(-2^2 + D2^2)}{N_1 + N_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{20(2^2 + (-2,8)^2) + 25(3_2 + (2.2)^2)}{20 + 25}}$$

$$= \sqrt{\frac{20(4 + 7.84) + 25(9 + 4.84)}{45}}$$

$$= \sqrt{\frac{(20 \times 11.84) + (25 \times 13.84)}{45}}$$

$$= \sqrt{\frac{236.8 + 346.0}{45}} = \sqrt{\frac{582.8}{45}}$$

$$= \sqrt{12.9511} = 3.598 \text{ or } 3.6$$

अत: $-_{12}$=3.6

उदाहरण-2

निम्नलिखित से अज्ञात सूचनाओं को ज्ञात कीजिए-

	श्रेणी A	श्रेणी B	श्रेणी C	सामूहिक
संख्या (N)	50	?	90	200
प्रमाप विचलन(−)	6	7	?	8
माध्य $(\overline{X})$	112	?	114	116

हल :

यहाँ हमें निम्नलिखित मान ज्ञात करना है :

(i) श्रेणी B में पदों की संख्या (N_2)

(ii) श्रेणी B का समान्तर माध्य $(\overline{X}_2)$ तथा

(iii) श्रेणी C का प्रमाप विचलन $(-_3)$

(i) N1 $= N_{123} - N_1 + N_3$

$= 200 - (50 + 90)$

$= 200 - 140$

$= 60.$

(ii) दिया हुआ है कि $\overline{X}_{123} = 116,\ \overline{X}_1 = 112,\quad X_2 = 114$

$$\text{चूँकि}\quad \overline{X}_{123} = \frac{(N_1.\overline{X}_1) + (N_2.\overline{X}_2) + (N_3.X_3)}{N_1 + N_2 + N_3}$$

सूत्र में रखने पर

$$116 = \frac{(50 \times 112) + (60.\overline{X}_2) + (90 \times 114)}{50 + 60 + 90}$$

$$116 = \frac{5600 + 60\overline{X}_3 + 10260}{200}$$

$$116 = \frac{15860 + 60\overline{X}_2}{200}$$

$$200 \times 116 = 15860 + 60\overline{X}_2$$

or $\quad 23200 + 15860 + 60\overline{X}_2$

or $\quad 23200 - 15860 = 60\overline{X}_2$

or $\quad 7340 = 60\overline{X}_2$