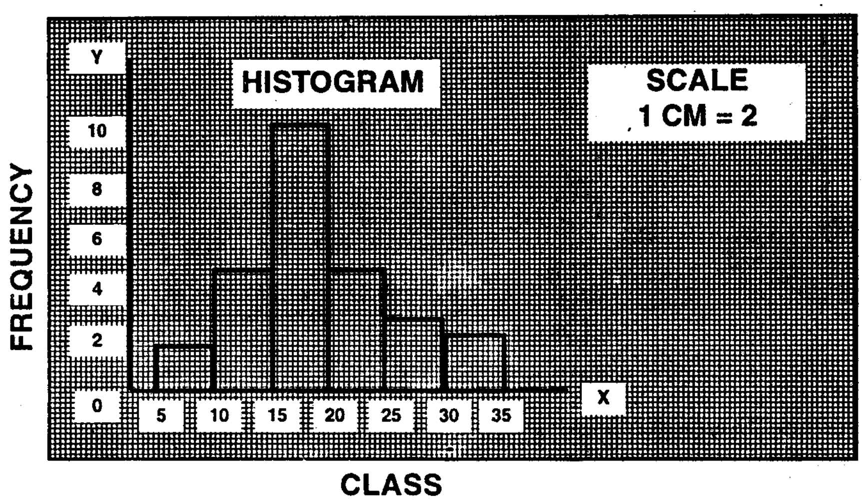
हल- प्रश्न में दिय गए वर्गान्तरों को समान वाले वर्गों मे बदला जा सकता है जो निम्न प्रकार है-

Adjusted Class	Adjusted Frequency
5-10	2
10-15	5
15-20	10
20-24	5
25-30	3
30-35	2

वर्गान्तरों को समान बनाने के लिए यहाँ दो-दो वर्गों तथा उनकी आवृत्तियों को आपस में मिला दिया गया है । एक बात का सदा ध्यान रखना चाहिए कि वर्गान्तरों को समान बनाने के लिए किसी वर्ग को तोड़ना या बाँटना कभी नहीं चाहिए क्योंकि एसी स्थिति में आवृत्तियों के जमाव का ज्ञान हमें नहीं रहता । वर्ग में सभी स्थानों पर समान आवृत्ति हो यह आवश्यक नहीं । इस प्रकार समायोजित वर्ग अन्तरालों के आधार पर आयत चित्र की रचना कर ली जायेगी जो निम्न प्रकार होगी-



उदाहरण - 5

निम्नलिखित वितरण से एक आयत चित्र की रचना करें-

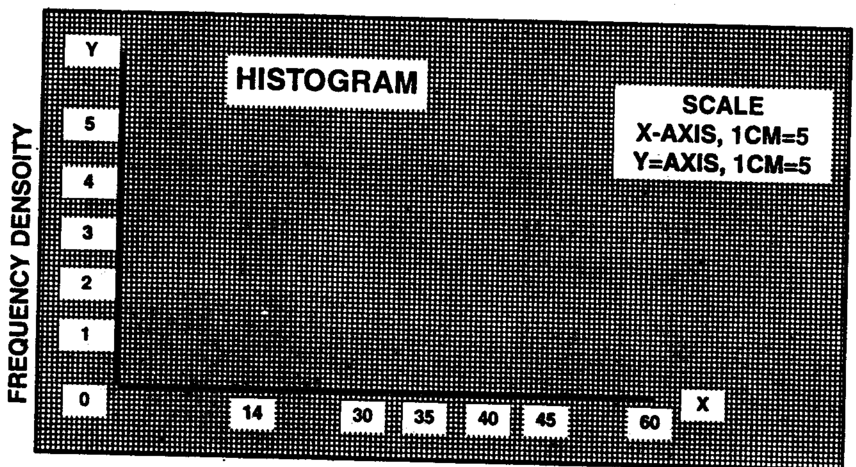
Class

Class	Frequency
0-14	7
14-30	16
30-35	15
40-45	20
45-60	30

हल-उपर्युक्त वितरण में दिए गए वर्गान्तर असमान है । उन्हें समान बनाना सम्भव नहीं है । अत: यहाँ आयत चित्र बनाने के लिए आवृत्ति का घनत्व निकाला जायेगा । किसी भी वर्ग की आवृत्ति का घनत्व उस वर्ग की आवृत्ति में उसके वर्ग विस्तार से भाग देने पर प्राप्त होता है । यहाँ आवृत्ति के घनत्व की गणना निम्न प्रकार की जायेगी-

वर्गान्तर	आवृत्ति	आवृत्ति का घनत्व
0 – 14	7	7 ÷ 14 = 5
14 – 30	16	16 ÷ 16 = 1
30 – 35	15	15 ÷ 5 = 3
40 – 45	20	20 ÷ 5 = 4
45 – 60	30	30 ÷ 15 = 2

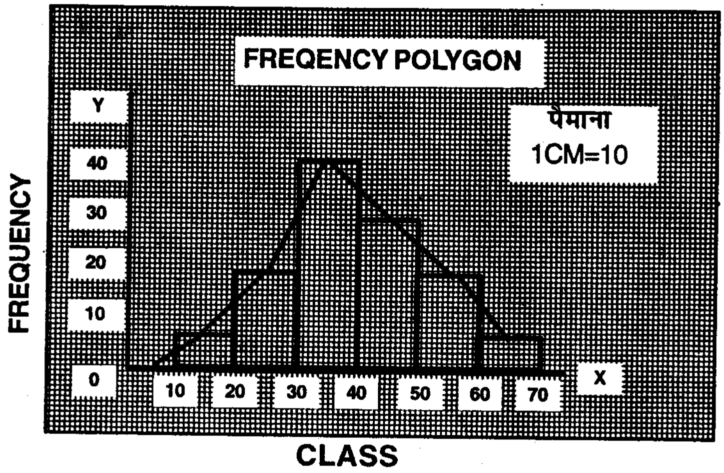
अब दिए गए वर्गान्तरों को ox रेखा पर तथा उनसे संबन्धित आवृत्ति के घनत्व की oy रेखा पर प्रांकित करके आयत चित्र की रचना की जायेगी । इसे आगे दिया जा रहा है-



(3) आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon)– आवृत्ति बहुभुज की रचना के लिए सर्वप्रथम चित्र बनाया जाता है । उसके बाद प्रत्येक आयत की ऊपरी भुजा के मध्य बिन्दु को निश्चित कर लिया जाता है । इन सभी मध्य बिन्दुओं को सरल रेखाओं द्वारा मिला दिया जाता है । दोनों किनारों के मध्य बिन्दुओं को उसी सीध में आगे की ओर बढ़ाते हुए खण्डित रेखा द्वारा ox रेखा से मिला दिया जाता है। इस प्रकार जो आकृति बिन्दु रेखीय पत्र पर बनती है उसे आवृत्ति बहुभुज कहा जाता है । समान वर्गान्तर वाली अनेक सजातीय आवृत्ति वितरणों को इस चित्र के द्वारा एक ही साथ प्रांकित किया जा सकता है । इनसे उनके बीच तुलनात्मक अध्ययन करना आसान हो जाता है । इसे निम्न उदाहरण के द्वारा आसानी से समझा जा सकता है ।

उदाहरण- 6

Class	Frequency
10 – 20	5
20 – 30	20
30 – 40	40
40 – 50	30
50 – 60	20
60 – 70	5

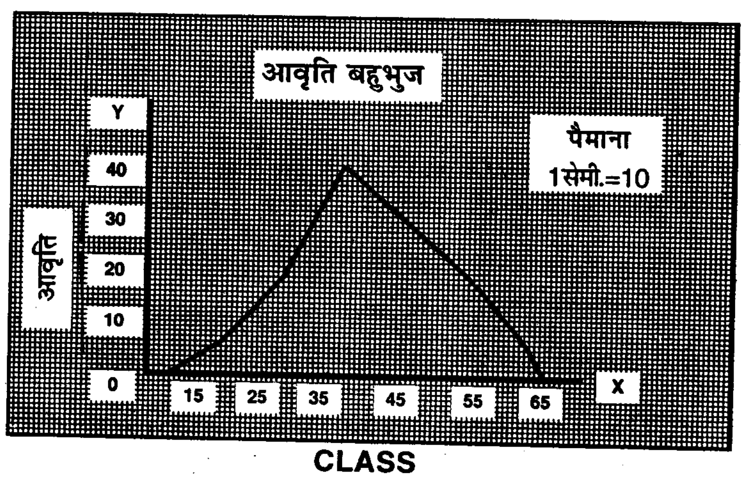


ऊपर के चित्र से स्पष्ट है कि विभिन्न आयतों के ऊपरी सीरे के मध्य बिन्दुओं को स्केच की मदद से सीधी रेखा द्वारा मिलाया जाता है । अन्तिम आयतों के मध्य बिन्दुओं को ox रेखा से मिलाते समय टूटी-फूटी रेखा का उपयोग किया जाता है । इसे इस प्रकार आगे बढ़ाया जाता है कि जितना क्षेत्र आयत का इस रेखा से बाहर छूटता है ठीक उतना ही नया स्थान इस रेखा के अन्दर आयत के बाहर का आ जाय ।

आवृत्ति बहुभुज की रचना बिना आयत चित्र बनाये भी की जा सकती है । इसके लिए प्रत्येक वर्गान्तर के मध्य बिन्दु के ऊपर आवृत्ति के बराबर ऊँचाई पर बिन्दु डाल दिया जाता है । इस प्रकार बिन्दुओं की सीधी रेखा द्वारा मिला दिया जाता है तथा अन्तिम बिन्दुओं से आगे उस रेखा को उसी सीध में बढ़ाते हुए ox से मिला दिया जाता है । इसके लिए ox रेखा पर भी वर्गअन्तराल की दोनों सीमाओं को लिखना आवश्यक नहीं है । केवल मध्यमान से ही उद्देश्य पूरा हो जाता है । इसे निम्न उदाहरण द्वारा दर्शाया जा सकता है-

उदाहरण - 7 उदाहरण 6 में दिये गये समंकों से बिना आयत चित्र बनाये आवृत्ति बहुभुज की रचना करें ।

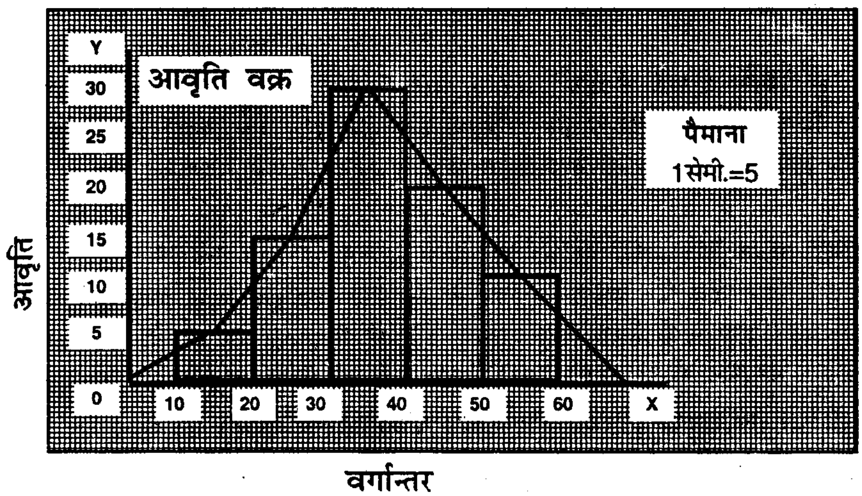
हल :



(4) आवृत्ति वक्र (Frequency curve)– आवृत्ति वक्र की रचना भी आवृत्ति बहुभुज के समान ही है । अन्तर केवल इतना ही है कि आवृति बहुभुज में विभिन्न मध्य बिन्दुओं को सरल रेखा से मिलाया जाता है । इसके कारण उनके बीच कोणीयता उत्पन्न ही जाती है । इसके विपरीत आवृत्ति वक्र में विभिन्न मध्य बिन्दुओं से होती हुई एक मुक्त हस्त वक्र रेखा खींच दी जाती है । इसमें कोणीयता

वर्ग अन्तराल :	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
आवृत्ति :	5	15	30	2	10

हल :



(5) संचयी आवृत्ति वक्र (Cumulative Frequency Curve) – जब संचयी आवृत्ति को कोटि अक्ष तथा वर्गान्तरों को आधार अक्ष पर प्रांकित कर बिन्दु रेखीय चित्र की रचना की जाती है तो इसे संचयी आवृत्ति वक्र कहा जाता है । संचयी आवृत्ति वक्र निम्नलिखित दो प्रकार की होती है ।

(1) "से कम" संचयी आवृत्ति वक्र ("Less than" type cumulative frequency curve), और

(2) "से अधिक" संचयी आवृत्ति वक्र ("More than" type cumuiative frequency curve).

(1) "से कम" संचयी आवृत्ति वक्र ("Less than" type cumulative frequency curve)– आधार स्तम्भ (ox) पर वर्गान्तरों की उच्चतम सीमा (1_2)को तथा कोटि अक्ष (oy) पर संचयी आवृत्ति को प्रांकित करने से जो वक्र तैयार होता है उसे "से कम" संचयी आवृत्ति वक्र कहा जाता है । ऐसे वक्र के सहारे वितरण की मध्यका (Median), चतुर्थक (Quartiles), दशमक (Deoile), शतमक (Percentile) आदि के [illegible] किया जा सकता है । निम्न उदाहरण से इसकी रचना विधि स्पष्ट की जा सकती है–

उदाहरण - 8

निम्नलिखित वितरण को "से कम" संचयी आवृत्ति वक्र द्वारा दिखावें ।

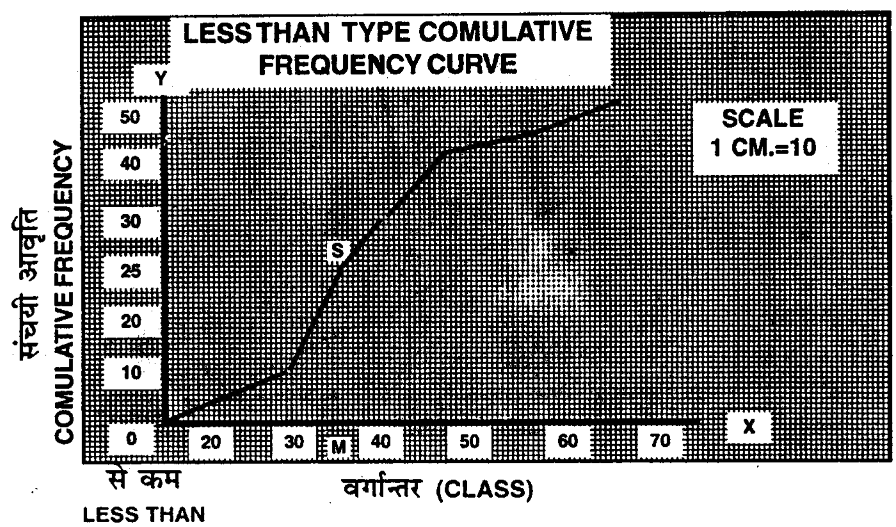
Class	Frequency
10 – 20	2
20 – 30	8
30 – 40	20
40 – 50	10
50 – 60	6
60 – 70	4

हल :

दिये गये वितरण को "से कम" संचयी आवृत्ति वितरण के रूप में परिवर्तित करने पर उसका स्वरूप निम्न प्रकार होगा-

वर्गान्तर	संचयी आवृत्ति
20 से कम	2
30 से कम	10
40 से कम	30
50 सं कम	40
60 से कम	45
70 से कम	50

उपर्युक्त परिवर्तित वितरण से निम्न वक्र तैयार किया जायेगा-



ऊपर के चित्र की मदद से मध्यका मूल्य निकालने के लिए सर्वप्रथम N/2 का मान निकाल कर उसे oy रेखा पर अंकित करते हैं । ध्यान रहे कि N सभी आवृत्तियों का योग है । उस बिन्दु से oy पर लम्ब डालते हैं । यह लम्ब वक्र को जिस बिन्दु पर काटता है

उसी बिन्दु से ox रेखा पर लम्ब डाला जाता है । यह लम्ब ox को जहाँ काटता है उसी बिन्दु पर स्थित मूल्य उक्त मध्यका का मान होता है। चित्र में मध्यका का मान निकाला गया है । यह मान 37.5 है ।

(2) "से अधिक" संचयी आवृत्ति वक्र ("More than" type cumulative frequency curve) – जब दिये गये वर्गान्तरों की निम्न सीमाओं को ox रेखा पर और तत्संबंधी संचयी आवृत्तियों को oy रेखा पर प्रांकित करते हैं तब "से अधिक" संचयी आवृत्ति वक्र प्राप्त होता है । अत: "से अधिक" संचयी आवृत्ति वक्र की रचना करने के पूर्व दिये गये वितरण को उसके अनुरूप परिवर्तित कर लिया जाता है । निम्न उदाहरण से वस्तुस्थिति स्पष्ट की जा सकती है ।

उदाहरण - 8 निम्न वितरण "से अधिक" संचयी आवृत्ति वक्र के द्वारा दिखावें-

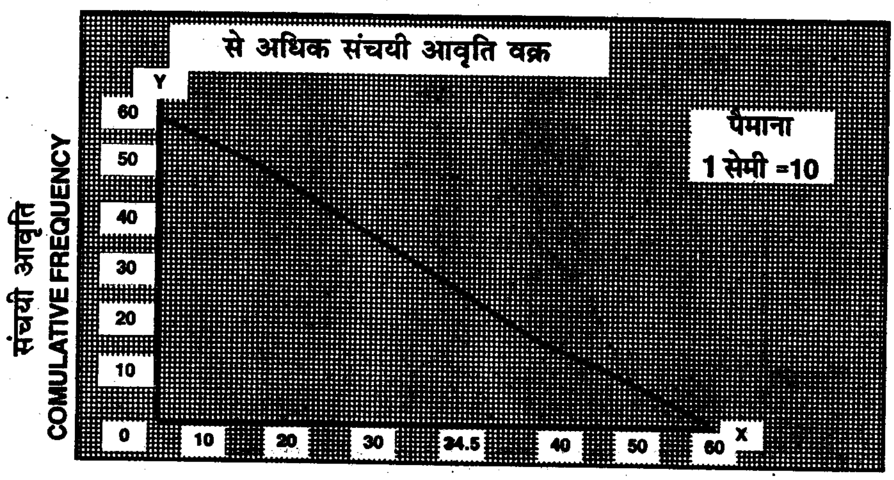
वर्गान्तर :	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
आवृत्ति :	5	15	20	10	6	2

हल :

सर्वप्रथम दिये गये वितरण को "से अधिक" संचयी आवृत्ति वितरण में निम्न प्रकार बदला जायेगा-

वर्गान्तर	संचयी आवृत्ति
10 से अधिक	58
20 से अधिक	53
30 से अधिक	38
40 से अधिक	18
50 से अधिक	8
60 से अधिक	2

यहाँ $N = 58; \frac{N}{2} = \frac{58}{2} = 29$



वर्ग अन्तराल

सूत्र द्वारा प्राप्त मान = 34.5

स्पष्ट है कि "से कम" संचयी आवृत्ति वक्र बायें नीचे से दायें ऊपर की ओर बढ़ती है और ठीक विपरीत "से अधिक" संचयी आवृत्ति वक्र बायें ऊपर से दायें नीचे की ओर बढ़ती है ।

आदर्श प्रश्न

(1) निम्नलिखित समंकों को बिन्दु-रेखीय चित्र द्वारा प्रदर्शित करें-

x :	4	6	8	10	12	14	18	20
f :	5	6	7	15	20	10	11	8

(2) निम्न वितरण से आयत चित्र की रचना करें तथा बहुलक का मान निकालें ।

Draw a histogram from the following distribution and locate the value of mode.

Class	Frequency
5 – 10	12
10 – 15	28
15 – 20	35
20 – 25	45
25 – 30	22
30 – 35	14

(3) आयत चित्र, आवृत्ति बहुभुज तथा आवृत्ति वक्र की तुलनात्मक वर्णन करें ।

(4) Construct a histogram, a frequency polygon and a Frequency ourve from the following date :

Class	Frequency
10 – 20	5
20 –30	10
30 – 40	20
40 – 50	10
50 – 60	5
60 – 70	2

(5) निम्न समंकों से संचयी आवृत्ति वक्र तैयार करें तथा माध्यम का मान ज्ञात करें ।

Carks	No. of Students
0 – 10	10
10 – 20	21
20 – 30	28

30 – 40	30
40 – 50	15
50 – 60	10
60 – 70	6
70 – 80	4

(6) Construct a histogram from the following.

Class :	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 60	60 – 100
f :	7	19	27	12	20

(7) निचे दिये गये आंकड़ों से आयत चित्र बनावें ।

Class	Frequency
5 – 10	5
11 – 13	8
13 – 15	2
15 – 20	20
20 – 24	30
24 – 25	5
25 – 30	10
30 – 35	6

(8) निम्न आंकड़ों से एक उपयुक्त बिन्दु-रेखीय चित्र तैयार करें :

Construct a suitable graph from the following data.

Marks above :	10	20	30	40	50	60	and	70
No. of students :	70	65	40	30	16	8	and	5.

वर्गीकरण एवं सारणीयन

(Classification and Tabulation)

प्रिय छात्रो,

संकलित समंक मूलत: संख्याओं की एक विशाल अव्यवस्थित ढेर के समान हाते हैं । इनके आधार पर कोई परिणाम नही निकाले जा सकते हैं । तुलनात्मक अध्ययन, विश्लेषण तथा निर्वचन के लिए भी ऐसे समंक उपयुक्त नहीं होते । अत: आवश्यकता इस बात की है कि संकलित सपंकों को संक्षिप्त रूप प्रदान किया जाय तथा उन्हें व्यवस्थित रूप में प्रस्तुत किया जाय ताकि उन्हें सरलतापूर्वक समझा जा सके तथा उनका तुलनात्मक अध्ययन, विश्लेषण एवं निर्वचन किया जा सके । वास्तव में इन्हीं उद्देश्यों की पूर्ति के लिए अपनायी जाने वाली प्रक्रियाओं को वर्गीकरण एवं सारणीयन कहा जाता है । इसके अन्तर्गत संकलित समंकों को उनकी समानता एवं असमानता के आधार पर विभिन्न वर्गों में अनुविन्यासित कर दिया जाता है । इससे उनका विश्लेषण सरल हो जाता है तथा उचित निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं । श्री जे० आर० हिक्स ने कहा है "Classified and arranged facts speak themselves, unarranged they are as dead as mutton". अर्थात् वर्गीकृत एवं क्रमबद्ध समंक अपने आप बोलते हैं जबकि अव्यवस्थित रूप में वे मांस की तरह मृत होते हैं ।

वर्गीकरण (Classification)– वर्गीकरण से तात्पर्य संकलित संमंकों में विद्यमान विशेषताओं एवं गुणों की समानता के आधार पर उनको विभिन्न वर्गों में बाँटने से हैं । स्पर तथा वोनी के शब्दों में "Classifiction is the grouping of facts into classes that are distinguished by some significant characteristics." अर्थात् वर्गीकरण तथ्यों का वर्गों के रूप में समूहीकरण है जिन्हें महत्वपूर्ण विशेषताओं के आधार पर अलग किया जाता है । उदाहरण के लिए पत्राचार पाठ संस्थान में विभिन्न बौद्धिक स्तर के छात्र पढ़ते हैं । इस विभिन्नता के बावजूद अनेक ऐसे छात्र भी हो सकते हैं जिनका बौद्धिक स्तर अन्यों से भिन्न किन्तु आपस में समान हो । प्रथम श्रेणी प्राप्त छात्रों का एक अलग समूह हो सकता है । इसी प्रकार द्वितीय श्रेणी तथा तृतीय श्रेणी प्राप्त छात्रों का भी पृथक-पृथक समूह हो सकता है ।

वर्गीकरण के आवश्यक तत्व **(Essential of classification)**– किसी भी सांख्यिकीय अनुसंधान में समंकों का वर्गीकरण उनकी विशेषताओं तथा अनुसंधान के उद्देश्यों को ध्यान में रखकर किया जाना चाहिए । अनुसंधान के उद्देश्यों की भिन्नता के कारण वर्गीकरण के लिए कोई निश्चित व कठोर नियम तो निर्धारित नहीं किये जा सकते किन्तु एक आदर्श वर्गीकरण के लिए निम्नलिखित बिन्दुओं को ध्यान में अवश्य रखा जाना चाहिए ।

1. **स्पष्टता (Clarity)**–वर्गों का निर्धारण पूर्णत: स्पष्ट होना चाहिए । उनका एक ही अर्थ तथा वह निश्चित होना चाहिए । कोई इकाई, किस वर्ग विशेष में रखी जायें इस संबंध में किसी प्रकार की अनिश्चितता नहीं होनी चाहिए ।

2. **व्यापकता (Comprehensiveness)** – वर्गीकरण करते समय इस बात को ध्यान में रखना चाहिए कि समग्र की प्रत्येक इकाई किसी-न-किसी वर्ग में अवश्य शामिल हो जाय । वर्गीकरण काफी व्यापक होना चाहिए किन्तु वर्गों की संख्या अनावश्यक रूप से बढ़ना भी नहीं चाहिए, अन्यथा वर्गीकरण का उद्देश्य ही समाप्त हो जायेगा ।

3. **सजातीयता (Homogeneity)**– वर्गीकरण करते समय यह बात विशेष रूप से ध्यान में रखनी चाहिए कि समान गुण व प्रकृति वाली सभी इकाई एक वर्ग में हों । अलग-अलग गुणों वाली इकाइयों के लिए अलग-अलग वर्ग होने चाहिए । विभिन्न वर्ग परस्पर अपवर्जी होने चाहिए ताकि एक इकाई का समावेश किसी एक ही वर्ग में हो सके ।

4. **स्थिरता (Stability)**–वर्गीकरण के लिए अपनायी गयी नीति अनुसंधान की अवधि में पूर्णत: स्थिर होनी चाहए । अगर किसी खस प्रकृति वाली इकाइयाँ किसी विशेष वर्ग में शामिल की गयी हैं तो उस प्रकृति की सभी इकाइयों को उसी वर्ग में शामिल किया जायेगा । वर्गीकरण के आधार में अस्थिरता होने से तथ्यों का तुलनात्मक अध्ययन नहीं किया जा सकता ।

5. **अनुकूलता (Suitability)**– वर्गीकरण करते समय अनुसंधान की प्रकृति, उद्देश्य, स्वभाव आदि का पूरा-पूरा ख्याल रखना चाहिए। वर्गीकरण ऐसा होना चाहिए कि परिस्थितियों के अनुसार उसमें आवश्यक परिवर्तन किया जा सके ।

वर्गीकरण के उद्देश्य (Objects of classification)–उपर्युक्त वर्णन से स्पष्ट है कि वर्गीकरण एक आवश्यक एवं महत्वपूर्ण कार्य है । इसके उद्देश्यों को संक्षेप में निम्न प्रकार गिनाया जा सकता है-

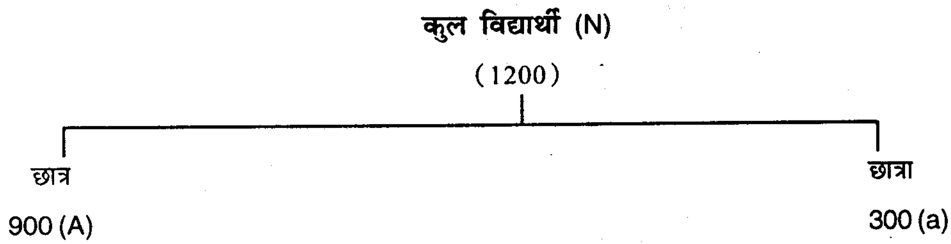
1. विस्तृत समंकों को संक्षिप्त रूप प्रदान करना जिससे उनको सरलतापूर्वक समझा जा सके ।
2. दो या दो से अधिक समग्रों के बीच तुलनात्मक अध्ययन को सरल बनाने के लिए वर्गीकरण आवश्यक है ।
3. संकलित जटिल समंकों की आन्तरिक विशेषताओं को स्पष्ट करने के लिए वर्गीकरण आवश्यक होता है ताकि व्यवस्थित समंकों से उचित निष्कर्ष निकाले जा सकें ।
4. समग्र में विद्यमान समानता एवं असमानता के गुणों को स्पष्ट करने के लिए वर्गीकरण आवश्यक होता है । इसके अन्तर्गत समान विशेषता वाली इकाइयों को एक वर्ग मं रखा जाता है । इससे समंकों को समझना सरल हो जाता है । उदाहरण के लिए किसी जनसंख्या को साक्षरता गुण के आधार पर साक्षर तथा निरक्षर दो समूहों में बाँटा जा सकता है ।
5. समंकों में मध्य कार्य-कारण सम्बन्ध की खोज के लिए वर्गीकरण उपयोगी होता है । उदाहरण के लिए, चेचक के मरीजों से संबंधित समंकों की मदद से यह पता किया जा सकता है कि टीकाकृत लोगों में चेचक की बीमारी अधिक होती है कि टीकाकरण रहित लोगों में ।
6. वर्गीकरण का एक उद्देश्य सारणीयन का आधार प्रस्तुत करना भी है । वर्गीकरण के अभाव में सारणीयन नहीं किया जा सकता ।

वर्गीकरण की रीतियाँ (Methods of classification)–सांख्यिकीय तथ्य दो प्रकार के होते हैं-(1) गुणात्मक (Qualitative), तथा (2) परिमाणात्मक (Quantitative)। ऐसे तथ्य जिनकी गणना नहीं की जा सकती है लेकिन उनकी उपस्थिति व अनुपस्थिति के आधार पर उनका अनुमान लगाया जा सकता है, उनको गुणात्मक तथ्य कहा जाता है । ऐसे तथ्यों को गुण (attributes) कहा जाता है । जैसे सुन्दरता, उदारता, शिक्षा का स्तर, बेरोजगारी का स्तर इत्यादि । इनके विपरीत परिमाणात्मक तथ्यों से आशय उन तथ्यों से है जिन्हें प्रत्यक्ष रूप में मापा व गिना जा सकता है । ऐसे तथ्यों को चर (Variables) कहा जाता है । जैसे-आय, वजन, लम्बाई, दूी इत्यादि । सांख्यिकीय तथ्यों की उपर्युक्त विशेषताओं को देखते हुए वर्गीकरण की निम्नलिखित विधियाँ उपयोग में लायी जाती हैं-

1. गुणात्मक वर्गीकरण (Qualitative classification)
2. संख्यात्मक वर्गीकरण (Quantiatative classification)

1. गुणात्मक वर्गीकरण-जब तथ्यों को गुणों के आधार पर वर्गीकृत किया जाय तो उसे गुणात्मक वर्गीकरण कहा जाता है । गुणात्मक वर्गीकरण दो प्रकार का होता है-(i) द्वन्द-भाजन वर्गीकरण (Dichotomy or Two-fold classification), तथा (ii) बहुगुणी वर्गीकरण (Multiple classification) ।

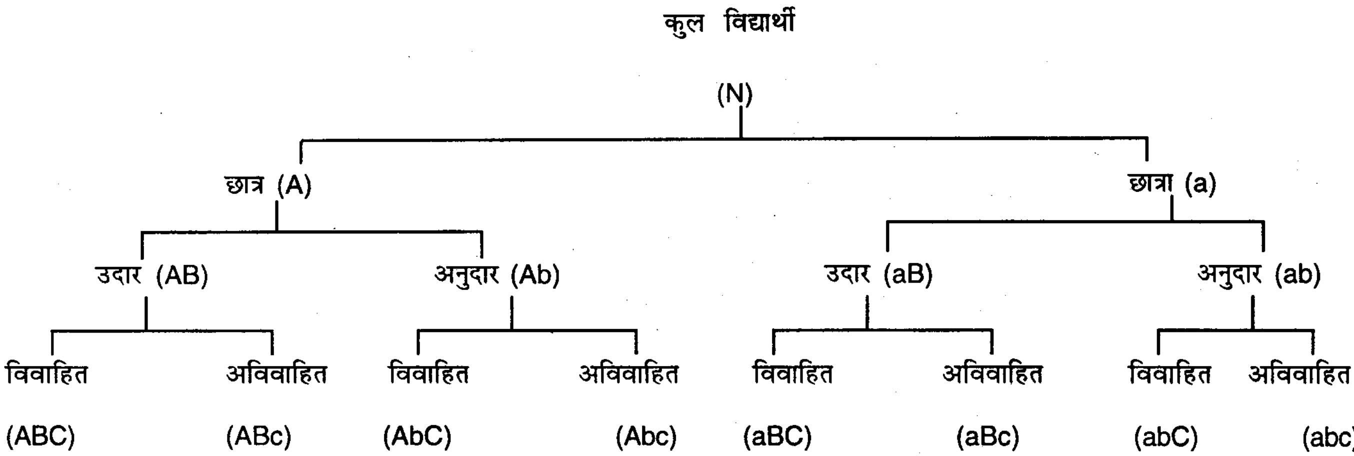
(i) द्वन्द-भाजन वर्गीकरण-जब तथ्यों को किसी एक गुण विशेष की उपस्थिति एवं अनुपस्थिति को आधार बनाकर वर्गीकृत किया जाता है तो ऐसे वर्गीकरण को द्वन्द वर्गीकरण कहा जाता है । इसमें गुणों की उपस्थिति को अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों (A, B, C etc.) द्वारा तथा अनुपस्थिति को छोटे अक्षरों (a, b, c. etc.) या ग्रीक वर्णमाला के α (अल्फा), β (बीटा), γ (गामा) आदि द्वारा दिखाया जाता है । उदाहरण के लिए यदि पत्राचार पाठ संस्थान के कुल 1200 विद्यार्थियों को लिंग के आधार पर बाँटा जाय तो इसके दो वर्ग बनेंगे- एक छात्रों का और दूसरा छात्राओं का । इसे निम्न प्रकार दिखाया जायेगा-



(ii) बहुगुणी वर्गीकरण-जब तथ्यों को एक से अधिक गुणों के आधार पर वर्गीकृत किया जाय तो इसे बहुगुनी वर्गीकरण कहा जाता है । ऐसे वर्गीकरण में सबसे पहले समय को किसी एक गुण के आधार पर दो वर्गों में वर्गीकृत किया जाता है । तत्पश्चात दूसरे गुण के आधार पर दोनों वर्गों को दो-दो उपवर्गों में बाँटा जाता है । फिर तीसरे गुण के आधार पर प्रत्येक उपवर्ग को दो-दो अपवर्गों में बाँटा जाता है । आवश्यकतानुसार इसी क्रिया को दुहराया जाता है । निम्न उदाहरण से इसे स्पष्ट किया जा सकता है-

उदाहरण - 1

पत्राचार पाठ संस्थान के विद्यार्थियों को लिंग, उदारता एवं वैवाहिक स्थिति के आधार पर वर्गीकृत करें ।



उपर्युक्त वर्गीकरण में (A) छात्र तथा (a) छात्रा के लिए, (B) उदार तथा (b) अनुदान के लिए और (C) विवाहित के लिए एवं (c) अविवाहित के लिए प्रयोग किया गया है ।

(ii) संख्यात्मक वर्गीकरण-संख्यात्मक वर्गीकरण के अन्तर्गत सांख्यिकीय तथ्यों को उनकी विशेषताओं जिनका मापन सम्भव है के आधार पर विभिन्न वर्गों में बाँटा जाता है । उदाहरण के लिए सम्बन्धी समंकों को विभिन्न आय वर्गों में वर्गीकृत किया जा सकता है । जैसे 1000 रु० से कम आय वाले व्यक्ति, 1000 से 2000 रु० तक आय वाले व्यक्ति, 2000 से 3000 रु० आय वाले व्यक्ति इत्यादि । इसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है ।

यदि पत्राचार पाठ संस्थान के बी० कॉम० के 30 छात्रों के सांख्यिकी विषय का प्राप्तांक निम्न प्रकार है-

30	50	60	70	40	35	30	40	45	42
38	45	56	65	68	70	72	75	80	82
85	90	92	70	40	60	70	80	95	30

तो इन्हें 10 - 10 प्राप्तांकों के वर्ग में निम्न प्रकार वर्गीकृत किया जा सकता है-

प्राप्तांक वर्ग	छात्रों की संख्या
30 - 40	5
40 - 50	6
50 - 60	2
60 - 70	4
70 - 80	6
80 - 90	4
90 - 100	3

संख्यात्मक वर्गीकरण में निम्नलिखित शब्दों का प्रयोग किया जाता है-

(i) वर्ग सीमाएँ (Class-limits)–ऊपर के उदाहरण से स्पष्ट है कि प्रत्येक वर्ग की सीमाएँ होती हैं। जिस संख्या से कोई वर्ग प्रारम्भ होता है उसे उस वर्ग की प्रथम अथवा निम्नतम सीमा (Lower limit or 1_1) कहा जाता है तथा जिस संख्या से वह वर्ग बन्द होता है उसे उस वर्ग की अन्तिम अथवा ऊपरी सीमा (Upper limit or 1_2) कहा जाता है। ऊपर के उदाहरण के पहले वर्ग की निम्नतम सीमा सीमा 30 और ऊपरी सीमा 40 है।

(ii) वर्ग विस्तार (Class interval)–किसी भी वर्ग की ऊपरी तथा निचली सीमाओं के अन्तर को वर्ग विस्तार अथवा वर्ग अन्तराल कहा जाता है। इसे 'i' द्वारा व्यक्त किया जाता है। उपर्युक्त उदाहरण में वर्ग विस्तार 10 है।

(iii) मध्य बिन्दु (Mid point)– वर्ग सीमों के बीच के बिन्दु को मध्य बिन्दु अथवा मध्य मूल्य कहा जाता है। मध्य मूल्य ज्ञात करने के लिए वर्ग की दोनों सीमाओं के योग में दो से भाग दे दिया जाता है। मध्य मूल्य $\frac{1_1 + 1_2}{2}$ ऊपर के उदाहरण में प्रथम वर्ग का मध्य मूल्य $\frac{30+40}{2} = 35$ होगा। इसी प्रकार अन्य वर्गों के लिए भी मध्य मूल्य निकाला जायेगा।

(iv) वर्ग आवृत्ति (Class frequency)–किसी वर्ग विशेष की दोनों सीमाओं में आने वाली इकाइयों की संख्या उक्त वर्ग की आवृत्ति कही जाती है। इसे 'f' से व्यक्त किया जाता है। उपर्युक्त उदाहरण में अन्तिम वर्ग की आवृत्ति 3 है। अर्थात् 90 से 100 के बीच अंक प्राप्त करने वाले छात्रों की संख्या मात्र 3 ही है।

वर्गान्तरों के अनुसार वर्गीकरण की प्रक्रिया

(Process invovled in classification by class-intervals)

साँख्यिकीय समंकों को वर्गान्तरों के रूप में वर्गीकृत करने के पूर्व निम्नलिखित प्रक्रियाओं के सम्बन्ध में निर्णय करना पड़ता है-

1. वर्गों की संख्या (No. of classes)
2. वर्ग विस्तार (Magnitude of class-intervals)
3. आवृत्ति-विन्यास (Arragement of Frequencies)

1. वर्गों की संख्या-सर्वप्रथम यह निश्चित करना पड़ता है कि सम्बन्धित समंकों को कितने वर्गों में विभाजित किया जाय। यह वर्गीकरण प्रक्रिया का प्रथम कार्य है। यद्यपि इस सम्बन्ध में कोई निश्चित नियम नहीं है फिर भी यह ध्यान रखना चाहिए कि वर्गों की

संख्या न तो बहुत अधिक हो और न बहुत कम । यदि वर्गों की संख्या बहुत अधिक होगी तो प्रत्येक वर्ग में आवृत्तियाँ बहुत कम होगी । ऐसा भी सम्भव है कि कुछ वर्गों की आवृत्तियाँ शून्य हो जाएँ । वर्गों की संख्या बहुत कम होने पर प्रत्येक वर्ग में आवृत्तियों का जमाव बहुत अधिक होगा और इससे समंकों की विशेषताओं का अध्ययन कठिन हो जायेगा । अत: वर्गों की संख्या उतनी ही रखनी चाहिए ताकि समंकों व उनकी आवृत्तियों के विषय में अधिक-से-अधिक स्पष्ट व अपेक्षित जानकारी प्राप्त की जा सके । वर्गों की आदर्श संख्या तो दिये गये समंकों के आकार के अनुसार निर्धारित की जाती है किन्तु सामान्यत: वर्गों की संख्या अगर 5 से 20 के बीच हो तो उसे आदर्श माना जाता है ।

2. वर्ग-विस्तार-वर्गान्तरों की संख्या निश्चित करने के पश्चात् दूसरा महत्वपूर्ण कार्य वर्गों का वर्ग विस्तार निश्चित करना होता है। वर्ग विस्तार के निर्धारण में उपलब्ध समंकों के सबसे बड़े व सबसे छोटे मूल्यों के अन्तर तथा पूर्व निर्धारित वर्गान्तरों की संख्या का उपयोग किया जाता है । यदि किसी वितरण में स्थिर समंकों का सबसे बड़ा मूल्य 89 तथा सबसे छोटा मूल्य 10 है और उन्हें 8 वर्गों में विभाजित करना है, तो वर्ग विस्तार निम्न प्रकार निश्चित किया जायेगा-

$$\text{Magnitude}(i) = \frac{\text{Largest value} - \text{Smalles}}{\text{No. of classes}}$$

$$= \frac{89-10}{8} = \frac{79}{8} = 9.87 \text{ or } 10 \text{ units.}$$

अर्थात् 10 से प्रारम्भ करते हुए 10-20, 20-30, 30-40,........80-90 कुल आठ वर्ग बनेंगे और प्रत्येक का वर्ग विस्तार 10 होगा। यदि सूत्र द्वारा निकाला गया वर्ग विस्तार पूर्णांक में नहीं आता तो गणना क्रिया की सरलता के लिए उसे पूर्णांक बना लिया जाता है । प्रो० स्टर्जे (Strurge) ने वर्गान्तरों की संख्या तथा वर्ग विस्तार के निर्धारण के लिए दो अलग-अलग सूत्रों का प्रतिपादन किया है जो निम्न प्रकार हैं-

1. वर्गों की संख्या = 1 + 3.332 log N

(ii) वर्ग विस्तार $(ii) = \dfrac{L-S}{1+3.322 \times \log N}$

यहाँ N = वितरण में कुल पदों की संख्या

log N = पद संख्या का लघुगणक

L = वितरण का सबसे बड़ा पद-मूल्य

S = वितरण का सबसे छोटा पद-मूल्य

3. आवृत्ति-विन्यास-इसके अन्तर्गत यह स्पष्ट किया जाता है कि किसी वर्ग अथवा आकार में समग्र की कुल कितनी इकाइयाँ हैं। इसे आवृत्ति वितरण व बंटन भी कहा जाता है । इस कार्य के लिए आवृत्ति वितरण तालिका व सारणी का निर्माण किया जाता है । इस तालिका में समंकों को वर्गों अथवा आकारों के रूप में समूहित किया जाता है । प्रत्येक वर्ग अथवा आकार से सम्बन्धित इकाइयों को उसके सामने लिख दिया जाता है जो उन वर्गों व आकारों की आवृत्तियाँ कही जाती हैं । अत: दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि मूल्यों व वर्गों और उनकी आवृत्तियों के क्रमबद्ध विन्यास को ही आवृत्ति विन्यास अथवा आवृत्ति बंटन कहा जाता है ।

आवृत्ति वितरण की रचना के लिए (i) चर तथा (ii) आवृत्ति, दो तत्वों की आवश्यकता होती है ।

(i) चर (Variable)-संख्यात्मक तथ्यों को चर (Variable) कहा जाता है । इसकी विशेषता यह है कि मात्रा व आकार की दृष्टि से इसमें परिवर्तन होते रहते हैं जैसे-आयु, वजन, लम्बाई, आय, व्यय, मूल्य, गति इत्यादि । चरों की माप के लिए भिन्न-भिन्न इकाइयों का उपयोग किया जाता है जैसे वजन को किलोग्राम में, आयु को वर्ष में, आय एवं व्यय को रुपयों में इत्यादि । चर दो प्रकार के होते हैं-(1) सतत चर और (2) खण्डित चर ।

(i) सतत चर (Continuous variable)– ये ऐसे संख्यात्मक तथ्य हैं जिनको छोटे-छोटे टुकड़ों में बाँट कर भी मापा जा सकता है। किन्हीं निश्चित सीमाओं के अन्तर्गत इनका कोई भी मूल्य हो सकता है। ग्रीगोरों एवं वार्ड के अनुसार "सतत चर वे हैं जो माप की इकाइयों में होते हैं, जिन्हें अनन्त स्तरों में बाँटा जा सकता है। जैसे तापमान एक डिग्री के दशमलवांश तक, लम्बाई एक इंच के दशमलवांश तक।"

(ii) खण्डित (असतत) चर Discrete (discontinous) Variable–खण्डित चर वे संख्यात्मक तथ्य हैं जिन्हें छोटे-छोटे टुकड़ों में बाँटा नहीं जा सकता। इसके मूल्य निश्चित होते हैं। दो मूल्यों के बीच एक निश्चित अन्तर होता है। इसकी इकाइयाँ विस्तार रहित होती हैं जैसे-परिवार में सदस्यों की संख्या, फुटबाल के खेल में गोलों की संख्या, किसी पुस्तक में प्रति पृष्ठ की गलतियों की संख्या, किसी माह में दैनिक दुर्घटनाओं की संख्या, विभिन्न कार्यालयों में कर्मचारियों की संख्या इत्यादि।

चरों की प्रकृति को देखते हुए आवृत्ति वितरण की रचना दो प्रकार से की जाती है-(i) खण्डित आवृत्ति वितरण तथा (ii) सतत आवृत्ति वितरण।

(i) खण्डित आवृत्ति वितरण (Discrete Frequency Distribution)–एक आवृत्ति वितरण का निर्माण खण्डित चरों तथा उनकी आवृत्तियों को व्यवस्थित क्रम में रखकर किया जाता है। सर्वप्रथम दिये गये समंकों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित कर लिया जाता है। तत्पश्चात चर के सभी मूल्यों को तालिका के प्रथम कॉलम में क्रमानुसार लिख लिया जाता है। इसके पश्चात् दिये गये प्रत्येक मूल्य के लिए उससे सम्बन्धित आकार के सामने दूसरे कॉलम में टैली बार (Tally marks) खींचकर लिख दिया जाता है। प्रत्येक पद (आकार) के सामने खींचे गये टैली बार की गणना करके उस पद की आवृत्ति ज्ञात कर सारणी के तीसरे कॉलम में लिख दिया जाता है। इसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है-

उदाहरण - 1

राजेन्द्रनगर पटनाके 30 परिवारों में प्रतिवार बच्चों की संख्या निम्न प्रकार है-

5	4	6	8	3	0	2	4	1	3	2	5
7	5	6	4	2	3	1	0	8	4	3	2
3	4	2	1	2	3.						

उपर्युक्त की सहायता से एक खण्डित आवृत्ति वितरण तालिका तैयार करें।

हल-

चूँकि विभिन्न परिवारों में पाये जाने वाले बच्चों की संख्या न्यूनतम शून्य तथा अधिकतम आठ है अत: सर्वप्रथम बच्चों की संख्या (चर) को शून्य से आठ तक बढ़ते हुए क्रम में लिख लिया जायेगा। तत्पश्चात यह पता किया जायगा कि किसी निश्चित संख्या वाले कितने परिवार हैं अर्थात् प्रत्येक पद की आवृत्ति कितनी है। दिये गये समंकों से एक-एक को लेकर देखा जायेगा कि वह किस पद से मिलता है। जिस पद से वह मिलता है उसी के सामने एक (मिलान रेखा) टैली बार (1) खींच दिया जायेगा। अगर किसी पद के सामने चार टैली बार खींचे जा चुके हैं और पाँचवीं भी उसी के सामने खींचना है तो पाँचवां टैलीबार तिरछा खींचा जाता है ताकि पूर्व के चारों कट जायें। इस प्रकार पाँच टैलीबारों का एक समूह बन जाता है। छठे टैलीबार को अब कुछ अन्तर पर खींचते हैं। टैलीबार खींचने का कार्य तब तक चलता रहता है जब तक सभी समंकों के लिए टैलीबार खींच नहीं लिये जाते। सुविधा के लिए, जिन समंकों के लिए टैलीबार खींच दिया जाता है उन्हें काट देते हैं ताकि किसी प्रकार की दुविधा नहीं उत्पन्न हो सके। अन्त में हमे निम्न तालिका प्राप्त हो जायेगी-

बच्चों की संख्या	मिलान रेखायें	आवृत्ति
0	11	2
1	111	3
2	~~1111~~ 1	6
3	~~1111~~ 1	6
4	~~1111~~	5
5	1 11	3
6	1 1	2
7	1	1
8	1 1	2
		Total 30

विधि-दिये गये समंकों में प्रथम संख्या 5 है । अत: इसके लिए आवृत्ति वितरण तालिकाके प्रथम कॉलम में लिखे 5 के सामने एक टैलीबार खींचा जायेगा । अब दूसरी संख्या 4 के लिए चार के सामने एक टैलीबार खींचा जायेगा और इसी प्रकार प्रत्येक संख्या के लिए उससे सम्बन्धित आकार के सामने टैलीबार खींचा जायेगा। आकार 2,3 और 4 के सामने चार-चार टैलीबार खीचे जा चुके हैं और अब पुन: उनके सामने एक-एक टैलीबार खींचना है अत: इस पाँचवें टैलीबार को तिरछे खींचा जायेगा । दूसरे तथा तीसरे आकार के सामने खींचा जाने वाला टैलीबार (अर्थात् छठा टैलीबार) प्रथम पाँच के समूह से कुछ हट कर खींचा जायेगा । अब प्रत्येक आकर के सामने खींचे गये टैलीबारों को गिनकर सारणी के तीसरे कॉलम में उनके सामने लिख दिया जाता है जिसे सम्बन्धित पद आकार की आवृत्ति कहते हैं । इस आवृत्ति कॉलम का योग दिये गये समंकों की संख्या होती है जो उपयुक्त उदाहरण में 30 है ।

(1) सतत आवृत्ति वितरण (Continuous Frequency Distribution)–इस आवृत्ति वितरण तालिका का निर्माण सतत चरों के लिए किया जाता है । हम जानते हैं कि सतत चरों को वर्गान्तरों के रूप में वर्गीकृत किया जाता है । इस तालिका के निर्माण के लिए सर्वप्रथम पूर्व निर्धारित वर्गान्तरों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में लिख लिया जाता है । तत्पश्चात दिए गए समंकों के लिए बारी-बारी से सम्बन्धित वर्ग अन्तराल के सामने खींचा जाता है । टैलीबार खींचने की विधि खण्डित आवृत्ति वितरण तालिका के ही समान होती है । अन्त में टैलीबारों को गिनकर आवृत्ति कॉलम में लिख दिया जाता है ।

सतत आवृत्ति वितरण तालिका के निर्माण के लिए निम्नलिखित दो रीतियों का उपयोग किया जाता है-

1. अपवर्जी रीति (Exclusive Method)
2. समावेशी रीति (Inclusive Method)

(1) अपवर्जी रीति-इस रीति में एक वर्ग की ऊपरी सीमा (l_2) उससे आगे वाले वर्ग की निचली सीमा (l_1) के बराबर रखी जाती है । यदि कोई पदमान किसी वर्ग की ऊपरी सीमा के बराबर हो तो उसके लिए खींचा जानेवाला टैलीबार उससे अलग वर्ग के सामने खींचा जाता है । दूसरे शब्दों में कहा जा सकता है कि किसी भी वर्ग की ऊपरी सीमा के बराबर के मान उस वर्ग में शामिल नही किये जाते हैं । यही कारण है कि इसे अपवर्जी रीति कहा जाता है । इसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है-

उदाहरण - 2

निम्नलिखित समंकों से अपवर्जी रीति द्वारा 5-5 का वर्ग विस्तार रखते हुए आवृत्ति वितरण सारणी तैयार करें-

8	10	30	35	15	20	10	5	7	9
9	7	6	5	30	25	19	16	20	10
18	14	16	15	13	12	11	13	18	12
20	24	30	29	27	22	21	20	23	22

हल-

दिए गए समंकों में न्यूनतम मान 5 तथा अधिकतम मान 35 है अत: 5 - 5 के वर्ग विस्तार को रखते हुए 5-10, 10-15...... 35-40 वर्ग तैयार किए जायेंगे ।

Exclusive	Tally-bars	Frequency
5 – 10	~~IIII~~ III	8
10 – 15	~~IIII~~ IIII	9
15 – 20	~~IIII~~ II	7
20 – 25	~~IIII~~ IIII	9
25 – 30	III	3
30 – 35	III	3
35 – 40	I	1

स्पष्टीकरण-दिए गए मान 8 के लिए तो प्रथम वर्ग के सामने टैलीबार खींचा गया है किन्तु दूसरे मान 10 के लिए दूसरे वर्ग 10-15 के सामने टैलीबार खींचा गया है क्योंकि 10 प्रथम वर्ग में शामिल नहीं है । उसी प्रकार 20 के लिए 20-25 वाले वर्ग के सामने टैलीबार खींचा गया है । अगर कोई अंग 24.9 रहता तो उसके लिए 20-25 के समने टैलीबार खींचा जाता । अर्थात् अपवर्जी वर्गों में वर्ग की ऊपरी सीमा से कम मूल्य ही शामिल किए जाते हैं ।

(ii) समावेशी रीति-इस रीति में वर्ग की ऊपरी तथा निचली दोनों सीमाओं के बराबर तक के पदमानों को उसमें शामिल किया जाता है । अपवर्जी रीति के विपरीत इसमें किसी वर्ग की ऊपरी सीमा उससे आगे वाले वर्ग की निचली सीमा के बराबर नहीं होती बल्कि उनमें एक निश्चित अन्तर होता है जो अधिकतम 1 के बराबर होता है । निम्न उदाहरण से इसे स्पष्ट किया जा सकता है-

उदाहरण- 3

10	20	25	15	18.5	16	19	30
12	14	13	18	19	15	11	35
40	30	20	28	27	26	23	13
50	48	47	47	46	45	44	43
42	41	40	39	38	37	36	35
33	31	28	27	26	25	24	23
22 20	18		17	18	16	23	25

यहाँ न्यूनतम मूल्य 10 है और वर्ग विस्तार 10 रखना है तथा अधिकतम मूल्य 50 है तथा अधिकतम मूल्य 50 है अतः 10-19, 20-29, 50-59 वर्ग बनेंगे ।

Class	Tally-bars	Frequency
10 – 19	IIII IIII IIII II	17
20 – 29	IIII IIII IIII II	17
30 – 39	IIII IIII	10
40 – 49	IIII IIII I	11
50 – 59	I	1
	Total	56

स्पष्टीकरण-ऊपर की आवृत्ति वितरण सारणी से स्पष्ट है कि समावेशी रीति में किसी भी वर्ग की उच्चतम सीमा भी वर्ग की उच्चतम सीमा और उसके अगले वर्ग की न्यूनतम सीमा के बीच एक का अन्तर होता है । प्रथम वर्ग में 10 से लेकर 19 तक के मूल्यों को शामिल किया गया है । दूसरे वर्ग में 20 से लेकर 29 तक के मूल्यों को शामिल किया गया है और इसी प्रकार अन्य वर्गों में भी मूल्यों को शामिल किया गया है ।

समावेशी रीति में एक कठिनाई यह होती है कि दो लगातार वर्गों की उच्चत एवं निम्नतम सीमाओं के बीच पड़ने वाले मूल्यों को कोई स्थान नहीं प्राप्त होता जैसे 19 और 20 के बीच के किन्हीं मूल्यों को इसके द्वारा नहीं दिखाया जा सकता है ।

सारणीयन

(Tabulation)

वर्गीकृत तथ्यों को उनकी विशेषताओं के अनुसार अलग-अलग खानों और पंक्तियों में व्यवस्थित करना ही सारणीयन कहलाता है। इससे समंकों की जटिलता समाप्त हो जाती है । उनकी विशेषताओं स्पष्ट हो जाती हैं तथा उनसे निष्कर्ष निकालना सरल हो जाता है । प्रो० कौनर के अनुसार "सारणीयन किसी विचाराधीन समस्या को स्पष्ट करने के उद्देश्य से किया गया सांख्यिकीय तथ्यों का क्रमबद्ध एवं सुव्यवस्थित प्रस्तुतीकरण है ।" "Tabulation involves the orderly and systematic presentation of numerical data in a form designed to elucidate the problem under consideration."

सारणीयन के लाभ

(Advantages of Tabulation)

1. **सरलता**-यह जटिल एवं विस्तृत सांख्यिकीय सूचनाओं को सरल एवं बोगम्य बना देता है । इससे सूचनाओं को शीघ्र एवं आसानी से समझने में मदद मिलती है ।

2. **स्थान एवं समय की बचत**-सारणीयन के द्वारा कम ही स्थान में बहुत अधिक सूचनाएँ दी जा सकती हैं तथा इससे एक ही शीर्षक को बार्-बार लिखना नहीं पड़ता । इससे स्थान एवं समय दोनों की बचत होती है ।

3. **तुलना सरल**-इससे समंकों को निकटवर्ती कॉलम में रखकर सरलतापूर्वक उनका तुलनात्मक अध्ययन किया जा सकता है।

4. **चित्रमय प्रदर्शन**-सारणियों के आधार पर समंकों को सुविधापूर्वक चित्रों व रेखा-चित्रों के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है ।

5. **सांख्यिकी विवेचन में सहायक**-सारणीयन के अभाव में समंकों का विवेचन व विश्लेषण कठिन है । समंकों को सारणीबद्ध करके ही विभिन्न सांख्यिकीय मापों की गणना की जाती है ।

सारणी के प्रमुख भाग

(Main Parts of a Table)

1. **शीर्षक (Title)**–प्रत्येक सारणी का एक संक्षिप्त, स्पष्ट एवं पूर्ण शीर्षक होना चाहिए । शीर्षक से सारणी के क्षेत्र, प्रकृति एवं समय की स्पष्ट जानकारी मिलनी चाहिए ।

2. **उपशीर्षक एवं अनुशीर्षक (Captions and Stubs)**–प्रत्येक सारणी में खाने (columns) एवं पंक्तियाँ (rows) होती हैं । प्रत्येक खाने एवं पंक्ति के संक्षिप्त उपशीर्षक (caption) एवं अनुशीर्षक (stub) लिखा जाना चाहिए । खानों की संख्या सारणी में यथासम्भव कम रखना चाहिए । किन्तु ध्यान रहे इस प्रयास में कोई आवश्यक सूचना छूट न जाय । प्रत्येक खाने एवं पंक्ति के योग का आयोजन होना चाहिए ।

3. **सारणी का मुख्य कलेवर Main Body of Table)**– सारणी के इस महत्वपूर्ण भाग के आकार-प्रकार का निर्धारण समंकों के आकार को देखते हुए पहले ही कर लेना चाहिए । भिन्न सजातीय मदों के लिए अलग-अलग खानों एवं पंक्तियों का उपयोग करना चाहिए । अंकों के आकार को यथासम्भव संक्षिप्त कर लेना उपयोगी होता है । जैसे अगर अंक बड़े-बड़े हों और उनके अन्त में अनेक अन्त में अनेक शून्य हों तो सारणी के ऊपर लिख देना चाहिए कि अंक हजारों, लाखों अथवा करोड़ों में दिये गये हैं ।

4. **रेखाएँ खींचना व स्थान छोड़ना (Rulling and spacing)**–सारणी की प्रभावपूर्णता इस बात से प्रभावित होती है कि रेखाएँ कैसे खींची गयी हैं तथा उनके बीच कितना स्थान छोड़ा गया है ।

5. **तुलनात्मक अध्ययन (Comparative study)**–जिन समंकों के बीच तुलनात्मक अध्ययन करना हो उन्हें सारणी में अगल-बगल के कॉलम में लिखा जाना चाहिए ।

6. **पदों का विन्यास (Arragement of Items)**–सारणी में विभिन्न पदों को उनके महत्व के अनुसार स्थान देना चाहिए । महत्वपूर्ण पदों को पहले तथा कम महत्वपूर्ण पदों को बाद में रखा जाना चाहिए ।

7. **पाद-टिप्पणी (Foot-notes)**–यदि समंकों से सम्बन्धित कोई महत्वपूर्ण सूचना सारणी में देना बाकी रह गयी हो अथवा सारणी में दी गयी किसी सूचना को स्पष्ट करने की आवश्यकता हो तब सारणी के नीचे एक व्याख्यात्मक टिप्पणी दे देनी चाहिए ।

8. **स्रोत (Source)**–सारणी के नीचे उस स्रोत को लिख देना चाहिए जिससे सारणी में दी गयी सूचनाएँ प्राप्त की गयी हैं । इससे सारणी की विश्वसनीयता एवं प्रभावपूर्णता बढ़ जाती है ।

9. **सारणी संख्या (Table No.)**–प्रत्येक सारणी की एक निश्चित संख्या होनी चाहिए । इसे सारणी के प्रारम्भ में सबसे ऊपर अथवा अन्त में सबसे नीचे लिखा जाना चाहिए । इससे सारणियों का संदर्भ बताने में सुविधा होती है ।

उपर्युक्त बातों के अतिरिक्त सारणी को स्पष्ट एवं आकर्षक होना चाहिए । वह समझने में सरल होनी चाहिए । डा० बाउले ने कहा है कि "एक सामान्य व्यक्ति को सारणी को समझने के लिए किया गया विशेष प्रयत्न, सही अर्थों में, सारणी की दोषपूर्ण रचना समझी जायेगी ।"

सारणियों के भेद

(Kinds of Tables)

रचना के आधार पर सारणियों को निम्नलिखित दो भागों में बाँटा जा सकता है-क

1. सरल सारणी (Simple Table)
2. जटिल सारणी (Complex Table)
   (A) द्विगुण सारणी (Complex Table)

(B) त्रिगुण सारणी (Triple Table)

(C) बहुगुण सारणी (Multiple Table)

1. **सरल सारणी**-यह सबसे आसान सारणी होती है । इसेक द्वारा किसी एक तथ्य अथवा किसी तथ्य के केवल एक गुण को दिखाया जा सकता है । इस सारणी का उदाहरण निम्नलिखित है-

Table NO. – 1

Age-wise Distribution of Population

Age-Groups (Years)	No. of persons (in lakh)
0 – 15	....
15 – 25	....
25 – 45	....
45 – 60	....
Above 60	
Total	

Foot Notes.......

Source...........

1. **जटिल सारणी** - जब समंकों के एक से अधिक गुणों को एक ही सारणी में प्रस्तुत किया जाता है तो उसे जटिल सारणी कहते हैं । जटिल सारणी निम्नलिखित तीन रूपों में तैयार की जाती है-

(A) **द्विगुण सारणी** - ऐसी सारणी में समंकों की दो विशेषताओं अथवा गुणों को दर्शाया जाता है । उदाहरण के लिए विभिन्न नगरों की जनसंख्या को शिक्षित-अशिक्षित रूप में दर्शाना । द्विगुण सारणी का एक उदाहरण निम्नलिखित है-

Table No......

Table showing Literate and Illiterate Population in Different towns in 1990

Towns	No. of persons (in lakh)		
	Literate	Illiterate	Total
A	....	....	....
B	....	....	....
C	....	....	....
Total	....	....	....

Foot-notes ....

Source ....

(B) **त्रिगुण सारणी**-इस प्रकार की सारणी में एक ही साथ समंकों के तीन गुणों को प्रदर्शित किया जाता है । उदाहरण के लिए किसी नगर की जनसंख्या को आयु, लिंग तथा साक्षरता के अनुसार दर्शाना ।

Table No.........

Distribution of Population by Age, Sex and Literacy.

Age-Groups	Male			Female			: Total		
	Literare	Illeterate	Total	Literate	Illiterate	Total	Licrate	Illiterate	Total
0 – 20	....	....	....	....	....	....	....	....	....
20 – 40	....	....	....	....	....	....	....	....	....
40 – 60	....	....	....	....	....	....	....	....	....
Above 60	....	....	....	....	....	....	....	....	....
Total	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Foot-notes ....

Souce..........

(C) **बहुगुण सारणी**-इस प्रकार की सारणी में समंकों को तीन से अधिक गुणों के आधार पर दर्शाया जाता है । उदाहरण के लिए किसी क्षेत्र की जनसंख्या को जिला, आयु, लिंग, साक्षरता आदि के आधार पर दिखाना । इसका एक उदाहरण निम्नलिखित है-

Table No.............

Distribution of Population by Districts, Age, Sex, and Literacy.

Districts.	Age-Groups (Years)	No. of Persons (in lakh)								
		Male			Female			Total		
		Literate	Illiterate	Total	Literate	Illiterate	Total	Literate	Illiterate	Total
A	0 – 30	......	......	......	......	......	......	......	......	......
	30 – 60	......	......	......	......	......	......	......	......	......
	Above 60	......	......	......	......	......	......	......	......	......
	Total	......	......	......	......	......	......	......	......	......
B	0 – 30	......	......	......	......	......	......	......	......	......
	30 – 60	......	......	......	......	......	......	......	......	......
	Above 60	......	......	......	......	......	......	......	......	......
	Total	......	......	......	......	......	......	......	......	......

Foot notes..........

Source ....

आदर्श प्रश्न

(Model Questions)

1. वर्गीकरण से आप क्या समझते हैं ? इसके उद्देश्य एवं महत्व पर प्रकाश डालें ।

   What do you understand by Classification ? Throw light on its objectives and importance.

2. **वर्गीकरण की** विभिन्न रीतियों का वर्णन करें ।

   Describe the various methods of classification.

3. सारणियन से आप **क्या समझते हैं** ? इसके उद्देश्य, रीतियों और महत्व का वर्णन कीजिए ।

   What do you mean by tabulation

4. Construct an exclusive continous series from the following date taking 10 as class interval.

40	48	53	60	69	90	50	55	49	93	95	82
44	55	63	77	80	82	62	60	53	54	70	99
77	76	88	46	42	66	60	57	75	65	56	55
48	94	95	88	60	62	54	63	45	48	90	88
72	76	68	70	50	60	57	43	45	69	80	90

5. Construct an inclusive series from the data given in question no. 4 taking 40–49 as the first class intervals.

6. Draw a blank table to present the following information regarding the college students according to–

   (a) Faculty : Science, Commerce

   (b) Class : Under-graduate, Post guaduate

   (c) Sex : Male and Female

7. श्रीराम गाँव के 500 जनसंख्या में 300 मर्द और औरतें हैं । 300 मर्दों में 200 विवाहित हैं तथा शेष अविवाहित । विवाहित मर्दों में 20% शिक्षित हैं । अविवाहित मर्दों में 90% शिक्षित हैं । औरतों में 80% अशिक्षित हैं । शिक्षित औरतों में 10% हैं । अशिक्षित औरतों में 90% विवाहित हैं ।

   उपर्युक्त कथन की सारणी दिखायें ।

अंकगणित माध्य

(Airthmetic Mean)

प्रिय छात्रो,

अंकगणितीय माध्य, केन्द्रीय प्रवृत्ति का सबसे लोकप्रिय माप है । सामान्य बोलचाल में जब हम माध्य अथवा औसत शब्द का प्रयोग करते हैं तो हमारा आशय इसी माध्य से होता है । यह गणना करने तथा समझने में सरल होती है । अंकगणितीय माध्य वह मूल्य है, जो किसी संमकमाला के सभी पदों के मूल्यों के योग में पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है । इसे संकेताक्षर $\overline{X}$ या a द्वारा व्यक्त किया जाता है । यह निम्नलिखित दो प्रकार का होता है-

(A) साधारण माध्य (Simple Mean)

(B) भारित माध्य (Weighted Mean)

(A) साधारण माध्य (Simple Mean)– इस प्रकार का माध्य गणना की दृष्टि से अत्यन्त सरल होता है । इसके निर्धारण में श्रेणी के प्रत्येक पद मूल्य को समान महत्व दिया जाता है । विभिन्न सांख्यिकीय समंकमालाओं में अंकगणितीय माध्य के निर्धारण की दो रीतियाँ हैं-प्रत्यक्ष रीति तथा लघुरीति । अब हमलोग उनका अध्ययन बारी-बारी से करेंगे ।

व्यक्तिगत श्रेणी में साधारण माध्य का निर्धारण

(I) प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)–व्यक्तिगत श्रेणी में माध्य ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित प्रक्रियाएँ सम्पन्न करनी पड़ती हैं ।

(i) श्रेणी के सभी पद मूल्यों का योग किया जाता है ।

(ii) प्राप्त योग को श्रेणी में स्थित पदों की संख्या से भाग दिया जाता है । इस प्रकार प्राप्त भागफल ही माध्य होता है ।

इस रीति का उपयोग सामान्यतः तभी करना चाहिए जब श्रेणी में पदों की संख्या कम हो तथा पद-मूल्य दशमलव में न हों । इस रीति में माध्य की गणना के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जाता है ।

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 X_3 + \ldots\ldots x_n}{N}$$

$$\text{or } \overline{X} = \frac{\Sigma \times}{N}$$

यहा - $\overline{X}$ = अंकगणितीय माध्य

ΣX = श्रेणी के सभी पद-मूल्यों का योग

N = श्रेणी में कुल पदों की संख्या

उदाहरण - 1

पत्राचार पाठ संस्थान के 12 कर्मचारियों का मासिक वेतन रुपयों में निम्न प्रकार हैं-

मासिक वेतन (रुपयों में)	250	420	150	640	870	1280
	600	900	890	500	700	1800

माध्य वेतन की गणना कीजिये ।

S. No.	Monthly Salary (in Rs.) ×
1	250
2	420
3	150
4	640
5	870
6	1280
7	600
8	900
9	890
10	500
11	700
12	1800
N = 12	9000

यहाँ

$\Sigma \times = 9000$

$N=12$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma \times}{N}$$

ऊपर के सूत्र में मान रखने पर :

$$\overline{X} = \frac{9000}{12} = 750$$

$\therefore$ माध्य मासिक वेतन = 750 रु०

लघु रीति (Short-cut Method)–इस रीति से माध्य की गणना करने के लिए निम्नलिखित प्रक्रियाएँ सम्पन्न करनी पड़ती हैं ।

(i) सर्वप्रथम श्रेणी में दिए गए मूल्यों के बीच में किसी एक सुविधाजनक मूल्य (A) का काल्पनिक माध्य (Assumed Mean) मान लिया जाता है । वैसे तो काल्पनिक-माध्य श्रेणी से बाहर का भी कोई मूल्य माना जा सकता है किन्तु व्यावहारिक यही होता है कि काल्पनिक-माध्य श्रेणी में स्थित मूल्यों के बीच में ही किसी संख्या को माना जाय । इस सम्बन्ध में यह भी ध्यान रखना चाहिए कि काल्पनिक माध्य श्रेणी के लगभग मध्य भाग में स्थित कोई सुविधाजनक (Convenient) संख्या हो, अन्यथा गणना क्रिया जटिल हो जाती है ।

(ii) श्रेणी के प्रत्येक पद-मूल्य (X) में से काल्पनिक-माध्य (A) को घटाकर, विचलन (dA) प्राप्त कर लिए जाते हैं अर्थात् $dA = X - A$

(iii) विचलनों का योग प्राप्त कर लिया जाता है : Σda या $\Sigma(X-A)$.

(iv) अन्त में निम्न सूत्र का प्रयोग करके माध्य प्राप्त कर लिया जाता है :

$$\overline{X} \text{ या } a = A + \frac{\Sigma dA}{N}$$

यहाँ : $\overline{X}$ = अंकगणितीय माध्य, A = काल्पनिक माध्य,

Σda = विचलनों का योग तथा N = श्रेणी में पदों की कुल संख्या ।

उदाहरण - 2

निम्न समंकों से माध्य ज्ञात करें :

Income : 920 840 730 420 850 370 580 600

हल :

S. No.	Income (X)	dx or (X – A)	
1	920	(920 – 700) = 220	
2	840	(840 – 700) = 140	
3	730	(730 – 700) = 30	
4	420	(420 – 700) =	–280
5	850	(850 – 700) = 150	
6	370	(370 – 700) =	–330
7	580	(580 – 700) =	–120
8	600	(600 – 700) =	–100
N = 8	$\Sigma X = 5310$	$\Sigma dx = (540 - 830)$	–290

माना कि माध्य = 700 = A

लघु रीति :

$$\bar{\Sigma} = A + \frac{\Sigma da}{N}$$

$$= 700 + \frac{-290}{8}$$

= 700 - 36.25

= 663.75

प्रत्यक्ष रीति : $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$

$$= \frac{5310}{8}$$

= 663.75

$\therefore \bar{X} = 663.75$

खण्डित श्रेणी में साधारण माध्य का निर्धारण

(I) **प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)**–इस रीति के अन्तर्गत माध्य ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित **प्रक्रियाओं** को सम्पन्न किया जाता है :

(i) श्रेणी के प्रत्येक मूल्य को उसकी आवृत्ति से गुणा किया जाता है अर्थात् $X_1\ xf_1$, $X_2\ xfr_2$, $X_3\ xf_3$...

(ii) सभी गुणनफलों का योग $(\Sigma f\ X)$ प्राप्त किया जाता है ।

(iii) अंत में प्राप्त गुणनफलों के योग $(\Sigma f\ X)$ में पदों की संख्या (N) से भाग देकर माध्य प्राप्त कर लिया जाता है । इसके लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है :

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fX}{N} \text{ अथवा } \overline{X} = \frac{\Sigma fX}{\Sigma f}$$

आवृत्ति श्रेणियों अर्थात् खण्डित एवं सतत श्रेणियों में पदों की संख्या उनकी आवृत्तियों के योग के बराबर होती है $N = \Sigma f$।

(2) लघु रीति (Short-Cut Method)– लघु रीति से माध्य ज्ञात करने के लिए निम्न प्रक्रियाओं को पूरा करना पड़ता है :

(i) सर्वप्रथम दिए गए पद-मूल्यों में से किसी को काल्पनिक माध्य (A) मान लिया जाता है ।

(ii) प्रत्येक पद-मूल्य (X) में से काल्पनिक माध्य (A) घटाकर विचलन (dA) ज्ञात कर लिया जाता है ।

(iii) प्रत्येक विचलन (dA) को तत्संबंधी आवृत्ति (f) से गुणा करके गुणनफलों का योग $(\Sigma f\, dA)$ निकाल लिया जाता है ।

(iv) अन्त में निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करके माध्य ज्ञात कर लिया जाता है :

$$X = A + \frac{\Sigma fdA}{N} \text{ अथवा } \overline{X} = \frac{\Sigma fdA}{\Sigma f}$$

यहाँ,

A= काल्पनिक माध्य, ΣfdA = विचलनों एवं आवृत्तियों के गुणनफलों का योग तथा $N = \Sigma f$ = श्रेणी में स्थित पदों की कुल संख्या।

उदाहरण - 3

निम्न वितरण का माध्य, प्रत्यक्ष तथा लघु रीतियों से ज्ञात करें :

Height in inches :	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66
No. of persons :	13	15	20	10	10	12	9	2	5	4

माध्य की गणना

		लघु रीति		प्रत्यक्ष रीति
height in inches (X)	No. of Persons (f)	(X – A) (dA)	(fdA)	(fx)
48	13	–12	–156	624
50	15	–10	–150	750
52	20	– 8	–160	1040
54	10	– 6	– 60	540
56	10	– 4	– 40	560
58	12	– 2	– 24	696
60	9	0	0	540
62	2	+ 2	+ 4	124
64	5	+ 4	+ 20	320
66	4	+ 6	+ 24	264
	$\Sigma f = 100$	$\Sigma dx = -30$	$\Sigma fdx = -542$	$\Sigma fx = -5458$

लघु रीति :

माना कि काल्पनिक माध्य = 60

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fda}{\Sigma f}$$

$$= 60 + \frac{-542}{100}$$

$= 60 - 5.42$

$= 54.28$

$\therefore \overline{X} = 54.28$ inches.

प्रत्यक्ष रीति :

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fx}{N}$$

$$= \frac{5458}{100}$$

$= 54.58$

$\therefore \overline{X} = 54.28$ inches.

सतत श्रेणी में अंकगणितीय माध्य का निर्धारण-

(I) प्रत्यक्ष रीति (Direct Methods)–इस रीति से सतत श्रेणी में साधारण माध्य (Simple Mean) ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित प्रक्रियाएँ पूरी की जाती हैं ।

(i) सर्वप्रथम, श्रेणी के सभी वर्गान्तरों (Class intervals) के मध्य मूल्य (Mid Values) निकाल लिया जाता है ।

(ii) मध्य मूल्यों को तत्संबंधी आवृत्तियों से गुणा कर गुणनफलों का योग (Σfx) ज्ञात कर लिया जाता है ।

(iii) प्राप्त गुणनफलों के योग में आवृत्तियों के योग (Σf) अर्थात् श्रेणी में स्थित इकाइयों की संख्या से भाग दिया जाता है । प्राप्त भागफल ही माध्य होता है । इसके लिए निम्नलिखित सूत्र का उपयोग किया जाता है :

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

यहाँ, $\overline{X}$ = माध्य, $\Sigma f + N$ तथा $\Sigma f.x$ = मध्य मूल्य एवं आवृत्ति के गुणनफलों का योग ।

ऊपर के वर्णन से स्पष्ट है कि मध्य मूल्यों के निकाले जाने के पश्चात् श्रेणी और खण्डित श्रेणी में कोई अन्तर नहीं रह जाता । दोनों ही श्रेणियों मं माध्य निकालने के लिए अपनायी गई प्रक्रियाएँ एक ही जैसी हो जाती हैं ।

उदाहरण - 4

निम्न वितरण का माध्य ज्ञात कीजिये :

Class :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
Frequency :	20	10	15	8	6	5

प्रत्यक्ष रीति द्वारा अंकगणितीय माध्य की गणना

Class	Mid values	Freequency	
0 – 10	(x)	(f)	(fx)
10 – 20	15	10	150
20 – 30	25	15	375
30 – 40	35	8	280
40 – 50	45	6	270
50 – 60	50	5	250
		N = 64	$\Sigma fx = 1425$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fx}{N}$$

$$= \frac{1425}{64}$$

$$= 22.27$$

$$\therefore \overline{X} = 22.27$$

(II) लघु रीति (Short-cut Method)–सतत श्रेणी मध्य मूल्य निकालने के पश्चात खण्डित श्रेणी के ही समान हो जाती है । अतः माध्य ज्ञात करने के लिए वही प्रक्रियाएँ सम्पन्न की जाती हैं जो खण्डित श्रेणी में सम्पन्न की जाती हैं । निम्न उदाहरण से वस्तुस्थिति स्पष्ट की जा सकती है ।

उदाहरण - 5 Calculate simple mean of the following :

Age :	10 – 20	20–30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
f :	40	30	60	50	20	10

हलः

लघु रीति से माध्य गणना

Age	Mid-values	Frequency	(X–A)	(fdA)
	(X)	(f)	dA/A=35	
10–20	15	40	– 20	– 800
20–30	25	30	– 10	– 300
30–40	35	60	0	0
40–50	45	50	+ 10	+ 500
50–60	55	20	+ 20	+ 400
60–70	65	10	+ 30	+ 300
		$\Sigma f = 210$		$\Sigma fdx = 100$

माना कि माध्य = 35 = A

$$\overline{\Sigma} = A + \frac{\Sigma fdA}{N}$$
$$= 35 + \frac{100}{210}$$
$$= 35 + 0.48$$
$$= 35.48$$
$$\therefore \overline{X} = 35.48 \text{ Years.}$$

पद-विचलन रीति (Step-deviation Method)–सतत श्रेणी में माध्य निर्धारण की लघु रीति को और अधिक सरल बनाने के लिए पद-विचलन रीति का उपयोग किया जा सकता है । लघु-रीति और पद-विचलन रीति में अन्तर मात्र यह है कि लघु रीति में जो विचलन लिए जाते हैं उन्हें पद बिचलन रीति में किसी समापवर्त्तक (Common factor) से भाग देकर संक्षिप्त कर लिया जाता है । इसे ही पद विचलन (d' A) कहा जाता है । सामान्यत: वर्ग विस्तार (Magnitude of the Class) को ही समापवर्त्तक मान लिया जाता है । ऐसे प्राप्त पद विचलनों को तत्संबंधी आवृत्तियों से गुणा करके, गुणनफलों का योग ($\Sigma fd'A$) ज्ञात कर लिया जाता है । अन्त में निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करके माध्य ज्ञात कर लिया जाता है :

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fd'A}{N} \times i$$

यहाँ, i = समापवर्त्तक (Common factor)

उदाहरण - 6

निम्न वितरण का माध्य निकालें :

Class :	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
Frequency :	10	20	30	20	10

हल:

पद विचलन रीति द्वारा माध्य की गणना

Class	Mid Values (x)	(x–A) dA/A=35	(dx ÷ 10) (d'A)/i=10	Frequency (f)	fd'A
10–20	15	–20	–2	10	–20
20–30	25	–10	–1	20	–20
30–40	35	0	0	30	0
40–50	45	+10	1	20	20
50–60	55	+20	2	10	20
				$\Sigma f = 90$	$\Sigma fd'A=0$

माना कि माध्य = 35 A, i = 10

$$\overline{\Sigma} = A + \frac{\Sigma fdA}{N} \times i$$

$$= 35 + \frac{0}{90} \times 10$$

$$= 35$$

$$\therefore \overline{X} = 35.$$

संचयी आवृत्ति वितरण में माध्य का निर्धारण-कभी-कभी वर्गान्तरों को संचयी आधार पर दिया जाता है । ऐसी स्थिति में माध्य ज्ञात करने के लिए संचयी वितरण को सामान्य वितरण में बदल देना चाहिए । परिवर्तन के पश्चात् उपर्युक्त सूत्र का उपयोग करके माध्य ज्ञात कर लिया जाता है । इसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण - 7

Calculate the Arithmetic mean from the following :

Marks less than :	10,	20,	30,	40,	50,	60,	70,	80
No. of Students :	25,	40,	60,	75,	95,	125,	190,	240,

उपर्युक्त सारणी में दस से कम अंक प्राप्त करने वाले छात्रों की संख्या 25 है । अतः वर्ग 0-10 की आवृत्ति (बारंबारता) 25 हुई । 20 से कम अंक प्राप्त करनेवाले छात्रों की संख्या 40 है । स्पष्ट है कि इन 40 छात्रों में 10 से कम अंक वाले 25 छात्र भी सम्मिलित हैं । अतः वर्गान्तर 10-20 की आवृत्ति 40-25=25 होगी । अर्थात् 10 या उससे अधिक परन्तु 20 से कम अंक प्राप्त करने वाले छात्रों की संख्या 15 है । इसी प्रकार 20-30 वर्ग की बारंबारता (आवृत्ति) 60-40=20 है, 30-40 वर्ग की आवृत्ति 75-60=15 है, आदि-आदि ।

हल:

पर विचलन रीति द्वारा माध्य का निर्धारण

Class	Mid-Values (x)	(X – A) (dA/A=45	(dx ÷ i) d'A/i = 10	Frequency (f)	id'A
0 – 10	5	– 40	– 4	25	– 100
10 – 20	15	– 30	– 3	15	– 45
20 – 30	25	– 20	– 2	20	– 40
30 – 40	35	– 10	– 1	15	– 15
40 – 50	45	0	0	20	0
50 – 60	55	+ 10	+ 1	30	+ 30
60 – 70	65	+ 20	+ 2	65	+ 130
70 – 80	75	+ 30	+ 3	50	+ 150
				N = 240	$\Sigma = fd'x = 110$

Assumed Mean = 45, 1=10

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fd' A}{N} \times i$$

$$= 45 + \frac{110}{240} \times 10$$

$$= 45 \div \frac{110}{24} \text{ or } 45 + 4.58 \text{ or } 49.58$$

∴ माध्य प्राप्तांक = 49.58.

समावेशी वर्गान्तर से माध्य निर्धारण-अगर समावेशी रूप में दिए गए हों तब माध्य ज्ञात करने के लिए उन्हें अपवर्जी (Exlusive) बनाने की कोई आवश्यकता नहीं होती । समावेशी वर्गान्तरों से ही मध्य मूल्य ज्ञात कर लिए जाते हैं । निम्न उदाहरण से इसे स्पष्ट किया जा सकता है :

Calcuate mean from the following :

Marks :	0 – 9	10 – 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49	50 – 59	60 – 69
Students :	18	20	25	30	16	8	3

हल :

Calculation of mean

Class	Mid-Values (x)	(X–A) dA/A = 24.5	(dx ÷ i) d'A/i=10	Frequency (f)	fd'A
0 – 9	4.5	– 30	– 3	18	– 54
10 – 19	14.5	– 20	– 2	20	– 40
20 – 29	24.5	– 10	– 1	25	– 25
30 – 39	34.5	0	0	30	0
40 – 49	44.5	+ 10	+ 1	16	+ 16
50 – 59	54.5	+ 20	+ 2	8	+ 16
60 – 69	64.5	+ 30	+ 3	3	+ 9
				N = 120	$\Sigma fd' x$ = -78

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fd' A}{N} \times i$$

$$= 34.5 + \frac{-78}{120} \overline{X} 10$$

$$= 34.5 + \frac{-78}{12} \text{ or } 34.5 - 6.5 = 28.0$$

∴ मध्य प्राप्तांक = 28.0

असमान वर्गान्तरों से माध्य का निर्धारण-जब दिए गए वर्गान्तर समान नहीं हों तो माध्य ज्ञात करने के लिए वर्गान्तरों को समान बनाने तथा आवृत्तियों में किसी प्रकार का समायोजन करने की आवश्यकता नहीं होती है । ऐसे प्रश्नों को मूल रूप में ही हल किया जाता है।

उदाहरण - 9

निम्न से माध्य ज्ञात करें :

Marks :	18 – 21	22 – 25	26 – 35	36 – 45	46 – 55
Students :	8	32	54	36	20

हल :

असमान वर्गान्तरों से माध्य की गणना

Class	Mid-Value (X)	(X – A) dA/A=30.5	Students (f)	fdA
18 – 21	19.5	– 11	8	– 88
22 – 25	23.5	– 7	32	–224
26 – 35	30.5	0	54	0
36 – 45	40.5	+ 10	36	+360
46 – 55	50.5	+ 20	20	+400
			N = 150	$\Sigma fdA = 448$

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma fdA}{N} \text{ or } 30.5 + 2.99$$

= 33.49

∴ माध्य प्राप्तांक = 33.49

सामूहिक माध्य (Combined Mean)–अंकगणितीय माध्य जिसे माध्य, समान्तर माध्य आदि नामों से भी पुकारा जाता है, की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि दो या अधिक समंक-समूहों के माध्य व उनके पदों की संख्या ज्ञात होने पर उनका सामूहिक माध्य ज्ञात किया जा सकता है । इसके लिए निम्न सूत्र का उपयोग किया जाता है :

$$\overline{X}_{12} = \frac{N_1.\overline{X}_1 + N_2\overline{X}_2 + \ldots Nn.\overline{X}_n}{N_1 + N_2 + N_n}$$

$\overline{X}_{12}$ = सामूहिक माध्य

$\overline{X}_1$ = प्रथम माध्य

N_1 = प्रथम माध्य

N_1 = प्रथम श्रेणी में पदों की संख्या

$\overline{X}_2$ = द्वितीय माध्य

N_2 = द्वितीय श्रणी में पदों की संख्या

उदाहरण - 10

निम्न आँकड़ों से सामूहिक माध्य ज्ञात करें :

	Factory (A)	Factory (B)
श्रमिकों की संख्या (N)	200	250
औसत दैनिक मजदूरी ($\overline{X}$)	5	2

हल :

यहाँ N_1=200 N_2=250

X_1=5 $\overline{X}_2 = 2$

$$\overline{X}12 = \frac{(N\ .\overline{X}_1)_1 + (N_2.X_2)}{N_1 + N_2}$$

$$= \frac{(1200 \times 5) + (250 \times 2)}{200 + 250}$$

$$= \frac{1000 + 500}{450} = \frac{1500}{450}$$

= 3.33

∴ सामूहिक औसत्र मजदूरी (X 12) = 3.33 रु०

आवृत्ति अथवा मूल्य का निर्धारण-माध्य की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि यदि किसी के तीन मानों $\overline{X}$, N और ΣX में से कोई दो का मान ज्ञात हो तो तीसरा मान निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है :

$$X = \frac{\Sigma X}{N} \text{ or } \frac{\Sigma fx}{N}$$

उदाहरण - 11

Find out the missing frequency from the following :

Marks :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
No. of Studnets :	14	22	30	?	5	4	1

The Average marks of the Students are 25.

Class	Mid-values (X)	Frequency (f)	fx	
0 – 10	5	14	70	
10 – 20	15	22	330	
20 – 30	25	30	750	
30 – 40	35	F	53 F	
40 – 50	45	5	225	
50 – 60	55	4	220	
60 – 70	65	1	65	
		N = 76 + F	$\Sigma fx = 1660 + 35F$	

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fx}{N} \text{ or } 25 = \frac{1660 + 35F}{76 + F}$$

or $25(76 + F) = 1660 + 35F$

or $1900 + 25F = 1660 + 35F$

or $25F - 35F = 1660 - 1900$

or $-10F = -240$

or $F = 24$

$\therefore$ अज्ञात आवृत्ति = 24.

(B) भारित माध्य (Weghted Mean)–साधारण माध्य की सबसे प्रमुख कमी अथवा विशेषता यह है कि इसमें श्रेणी के बड़े अथवा छोटे सभी पदों को समान महत्व दिया जाता है । ऐसा करना उचित नहीं होता क्योंकि प्रत्येक पद का श्रेणी में अपना पृथक महत्व होता है । उनके महत्वों में विभिन्नता होती है । अत: आवश्यकता इस बात की है कि माध्य की गणना करते समय श्रेणी के सभी पदों के सापेक्षिक महत्व को भी ध्यान में रखा जाय । इस प्रकार निकाले गये माध्य को ही भारित माध्य कहा जाता है । उदाहरण के लिए पटना विश्वविद्यालय के कर्मचारियों के औसत वेतन की गणना करने के लिए कुलपति, प्राचार्य, व्याख्याता और चतुर्थवर्गीय कर्मचारियों के वेतन को समान महत्व देना गलत होगा क्योंकि उनकी संख्या समान नहीं है ।

भारित माध्य की गणना में भार अथवा महत्व का निर्धारण एक कठिन समस्या होती है । भार दो प्रकार के होते हैं-वास्तविक तथा अनुमानित । वास्तविक भार तो स्पष्टत: दिये हुए होते हैं किन्तु उनकी अनुपस्थिति में श्रेणी के पदों के सापेक्षिक महत्व को देखते हुए अनुमानित भार का निर्धारण स्वयं करना पड़ता है । अनुमानित भार के साथ एक समस्या यह है कि विभिन्न व्यक्तियों के अनुमान के अन्तर हो सकते हैं । अत: भारों को अनुमान तर्कसंगत होना चाहिए ।

भारित माध्य की गणना-भारित माध्य वह है जिसे निकालने के लिए प्रत्येक पद को उसके भार (Weights) से गुणा किया जाता है तथा इस प्रकार प्राप्त संख्याओं के योग में भारों के योग से भाग दे दिया जाता है । सामान्यत: आवृत्ति को भार के रूप में प्रयुक्त किया जाता है । भारित माध्य की गणना निम्न दो रीतियों से की जा सकती है :

(I) प्रत्यक्ष रीति-इस रीति में सर्वप्रथम श्रेणी के पद मूल्यों (x) और तत्संबंधी भारों (w) को गुणा किया जाता है और इन गुणनफलों का योग (Σxw) प्राप्त कर लिया जाता है । तत्पश्चात निम्न सूत्र का उपयोग किया जाता है-

$$\overline{X}_w = \frac{\Sigma xw}{\Sigma w}$$

यहाँ, $\overline{X}_w$ = भारित माध्य, Σxw = पद मूल्यों एवं भारों की गुणाओं का योग, Σw = भारों का योग ।

(2) लघु रीति-यह रीति साधारण माध्य की गणना में प्रयुक्त लघु रीति के ही समान है । इसमें निम्न पद्धति अपनाई जाती है :

(i) सर्वप्रथम दिए गए मूल्यों में से किसी को माध्य मानते हुए प्रत्येक मूल्य के विचलन (DA) ज्ञात कर लिए जाते हैं ।

(ii) प्राप्त विचलनों और तत्संबंधी भारों को गुणा करके गुणनफलों का योग (ΣwdA) ज्ञात कर लिया जाता है ।

(iii) अन्त में निम्न सूत्र का उपयोग करके भारित माध्य पता कर लिया जाता है ।

$$\overline{X}w = Aw + \frac{\Sigma wdA}{\Sigma w}$$

यहाँ : Aw= काल्पनिक भारित माध्य, Σ wdA = विचलनों एवं भारों को गुणाओं का योग तथा $\overline{X}w$ = भारित माध्य । निम्न उदाहरण से उपर्युक्त दोनों रीतियों को समझा जा सकता है :

उदाहरण - 12

निम्न समंकों से प्रत्यक्ष एवं लघु रीति से भारित माध्य की गणना करें ।

X :	10	40	30	80	70	50
Weights :	6	4	5	1	2	3

हल :

यहाँ पदों को स्पष्ट रूप से भार दिए गए हैं ।

Calculation of Weighted Mean.

(X)	(W)	Direct Method (XW)	Shortcut Method dA/50	(WdA)
10	6	60	−40	−240
40	4	160	−10	− 40
30	5	150	−20	−100
80	1	80	30	+30
70	2	140	20	0
50	3	150	0	0
	21	$\Sigma xw = 740$		$\Sigma wdx = -310$

Direct Method	Short Cut Method
	मान कि $A_w = 50$
$\overline{X}w = \dfrac{\Sigma xw}{\Sigma w} = \dfrac{740}{21} = 35.238$	$\overline{X}w = Aw + \dfrac{\Sigma wdA}{\Sigma w} = 50 + \dfrac{-310}{21} = 50 - 14.762 = 35.238$

कभी-कभी प्रश्न में भार स्पष्ट रूप में नहीं दिया रहता वह आंकड़ों में ही गर्भित रहता है, जैसे-विभिन्न वर्गों में आने वाले पदों की संख्या, उपभोग की मात्रा, उत्पादन की मात्रा, कार्य पर लगे समय की मात्रा, परीक्षा में सम्मिलित छात्रों की संख्या इत्यादि । निम्न उदाहरण से इसे स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण–13

Mr. A spent Rs. 300 for apples Rs. 300 for apples consting Rs. 15 per kg. and another Rs. 100 for orange costing Rs. 20 per kg. What is the average price of fruits per kilogram ?

हल :

यहाँ फलों का प्रति किलो औसत कीमत ज्ञात करना है । विभिन्न दरों पर क्रय की गई मात्राएँ स्पष्टत: नहीं दी गई हैं । अत: उन्हें ज्ञात कर उनका उपयोग भार (Weight) के रूप में किया जायेगा ।

Calculation of weighted mean

Price per kg. (x)	Quantity (w)	Product (xw)	
15	300 ÷ 15 = 20 kg.	300	$\overline{X}w = \dfrac{\Sigma xw}{\Sigma w}$
20	100 ÷ 25 kg.	100	$= \dfrac{400}{25} = 16$
	$\Sigma w = 25$ kg.	$\Sigma xw = 400$	

∴ फलों की औसत कीमत प्रति किलोग्राम = Rs. 16/-

कभी-कभी ऐसे भी प्रश्नों से आपका पाला पड़ सकता है जिसमें न तो स्पष्ट और न गर्भित रूप में ही भार दिए हुए हों । ऐसी स्थिति में भारित माध्य की गणना करने के लिए अनुमानित भारों का उपयोग किया जाता है । इसे निम्न उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण - 14

The following tables gives the results of certain examinations of two Universities in the year 1990. Which is the best University ?

Name of Exam.	Percentage University A	results in University B
M. A.	80	70
M. Sc.	70	60
M. Com.	80	80
B. A.	65	70
B. Sc.	60	80
B. Com.	75	75

हल :

यहाँ विभिन्न परीक्षाओं का उत्तीर्ण-प्रतिशत दिया हुआ है । इससे यह पता चलता है कि किस परीक्षा में कितने छात्र शामिल हुए । हम यह भी जानते हैं कि विभिन्न परीक्षाओं में शामिल छात्रों की संख्या में भी काफी भिन्नता होती है । अतः दोनों विश्वविद्यालयों के परीक्षाफलों की तुलना के लिए उत्तीर्ण प्रतिशतों का साधारण माध्य नहीं बल्कि भारित माध्य निकाला जायेगा । इसके लिए विभिन्न परीक्षाओं में सम्मिलित होने वाले छात्रों की संख्या ही भार का कार्य करेगी । चूँकि प्रश्न में भारों की संख्या नहीं दी हुई है अतः हम उन्हें अनुमान से निर्धारित करेंगे जो सभी विश्वविद्यालयों के लिए समान होगी ।

Calcuation of Weighted Mean

Exams.	No. of Students in hundered (Assumed weight) (w)	University A		University B	
		Pass % (w)	(xw)	Pass % (x)	(xw)
M. A.	4	80	320	70	280
M. Sc.	2	70	140	60	120
M. Com.	1	80	80	80	80
B. A.	10	65	650	70	700
B. Sc.	6	60	360	80	480
B. Com.	5	75	375	75	375
	$\Sigma w = 28$		$\Sigma xw = 1925$		$\Sigma xw = 2035$

$$\overline{X}w \text{ for University A} = \frac{\Sigma xw}{\Sigma w} = \frac{1925}{28} = 68.75\%$$

$$\overline{X} \text{ for University B} = \frac{\Sigma xw}{\Sigma w} = \frac{2035}{28} = 72.68\%$$

अत: **विश्वविद्यालय B** सबसे अच्छा है ।

भारित माध्य की उपयोगिता-आर्थिक समस्याओं के अध्ययन में भारित माध्य का महत्वपूर्ण स्थान है । इसका उपयोग परिस्थितियों पर निर्भर करता है । सामान्यत: भारित माध्य का उपयोग निम्नलिखित परिस्थितियों में किया जाता है :

(1) जब कई उपवर्गों में विभाजित श्रेणी का माध्य ज्ञात करना हो ।

(2) जब श्रेणी की विभिन्न इकाइयों का अलग-अलग सापेक्षिक महत्व हो ।

(3) जब विभिन्न श्रेणियों के विभिन्न वर्गों के तुलनात्मक प्रतिशत, अनुपात या दर दिए हों और पूरी श्रेणी का प्रतिशत, अनुपात या दर निकाल कर अन्य श्रेणियों से तुलना करना हो ।

(4) जब श्रेयी के उपवर्गों का साधारण माध्य दिया हुआ हो और श्रेणी का माध्य निकालना हो ।

(5) जब दिए गए पदनामों की आवृत्तियां अलग-अलग हों ।

अंकगणितीय माध्य के गुण (Merits of Arithmetic Mean)-केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक माप के रूप में अंकगणितीय माध्य के गुण निम्नलिखित हैं ।

(1) **सरलता**-अंकगणितीय माध्य गणना करने तथा समझने की दृष्टि से अत्यन्त सरल है । सामान्य बुद्धि वाले व्यक्ति भी इसे आसानी से समझ जाते हैं ।

(2) **सर्वश्रेष्ठ प्रतिनिधि**-यह माध्य श्रेणी का सबसे अच्छा प्रतिनिधि माप होता है क्योंकि यह श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता है । इसकी गणना करते समय किसी भी पद-मूल्य को छोड़ा नही जाता ।

(3) **निश्चितता**-यह निश्चित होता है । बहुलक तथा मध्यका की तरह इसका मूल्य "अन्तरगणन व अनुमान" पर आधारित नहीं होता ।

(4) **स्थिरता**-निदर्शन के परिवर्तनों का माध्य पर न्यूनतम प्रभाव पड़ता है । अगर किसी समग्र से दैव के आधार पर पर्याप्त संख्या वाले अनेक न्यादर्श लिये जायें तो उनके अंकगणितीय माध्यों के बीच अन्तर बहुत कम अथवा नगण्य होता है ।

(5) **बीजगणितीय विवेचन**-इसके आधार पर बीजगणितीय क्रियाएँ की जा सकती हैं । अज्ञात मूल्यों को इसके माध्यक से ज्ञात किया जा सकता है । अपने बीजगणितीय गुणों के कारण यह माध्य अन्य सांख्यिकी रीतियों जैसे-अपकिरण, विषमता, सह-संबंध, प्रवृत्ति मापन तथा प्रतीपगमन आदि में प्रयोग किया जाता है ।

अंकगणितीय माध्य के दोष (Demerits of Arithmetic mean)-सबसे लोकप्रिय माध्य होने के बावजूद अंकगणितीय माध्य में निम्नलिखित कमियाँ पायी जाती हैं :

(1) **चरम मूल्यों को अधिक महत्व**-यह माध्य श्रेणी में स्थित बड़े मूल्यों को अधिक महत्व देता है, उनसे अधिक प्रभावित होता है । उदाहरण के लिये, अगर चार मित्रों का मासिक व्यय क्रमश: 2000, 50, 50 और 40 रु० है तो उनका औसत मासिक व्यय 535 रु० होगा जो वास्तविक स्थिति से काफी भिन्न है क्योंकि चार में से तीन की आय तो 50 रु० से भी कम है । केवल एक मूल्य (2000रु०) के बड़े होने के कारण माध्य मासिक व्यय इतना अधिक हो गया है ।

(2) **अवास्तविक माध्य**-कभी-कभी माध्य का मान पूर्णांक में न होकर दशमलव के रूप में आ जाता है । उदाहरण के लिबए अगर चार पुस्तकों में पन्नों की संख्या क्रमश: 300, 421, 215 और 157 हों तो प्रति पुस्तक औसत पन्नों की संख्या 273,25 आती है जो स्वाभाविक नहीं लगता ।

(3) **अप्रतिनिधित्व**-अंकगणितीय माध्य का मूल्य श्रेणी में अनुपस्थित कोई मूल्य भी हो सकता है । ऐसी स्थिति में यह माध्य श्रेणी का उचित प्रतिनिधित्व नहीं कर पाता है ।

(4) **गणना संबंधी जटिलता**-स्थिति संबंधी माध्यों, जैसे बहुलक की तुलना में अंकगणितीय माध्य की गणना क्रिया जटिल है । श्रेणी का कोई भी मूल्य अगर अज्ञात है तो अंकगणितीय माध्य नहीं निकाला जा सकता । इसका निर्धारण निरीक्षण अथवा बिन्दुरेखीय रीति से सम्भव नहीं होता ।

(5) **भ्रमात्मक निष्कर्ष**-अंकगणितीय माध्य भ्रमात्मक निष्कर्ष निकालने के लिए आसानी से प्रयोग में लाया जा सकता है । उदाहरण के लिए दो परिवारों की वार्षिक आय गत तीन वर्षों में निम्न प्रकार रही है-

A: Rs. 10,000 + Rs. 20,000 + Rs. 45,000 = औसत आय 25,000

B: Rs. 45,000 + Rs. 20,000 + Rs. 10,000 = औसत आय 25,000

स्पष्ट है कि दोनों परिवारों की औसत आय एक समान है । परन्तु वास्तविकता है कि परिवार A की आर्थिक स्थिति सुदृढ़ता की ओर बढ़ रही है तो परिवार B की स्थिति खराब होती जा रही है ।

●

आदर्श प्रश्न

1. निम्न समंकों से माध्य की गणना कीजिये :

आय (रू० में) : 500 700 600 300 800 500 1300 1800 2000 400 750 613 810 900.

2. Calculate Mean from the following :

Size :	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Frequency :	25	28	18	19	20	25	30	10	5	2

3. निम्न वितरण का अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिये :

Class :	0 – 15	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30
Frequency :	5	8	10	12	6	4

4. लघु रीति से माध्य की गणना करें :

Expenditure (below) :	5	10	15	20	25
No. of Students :	6	16	28	38	46

5. Find the average marks of a students from the following table :

Marks above :	60	50	40	30	20	10	0
No. of Students :	35	43	58	[illegible]	82	90	100

6. निम्न वितरण का माध्य ज्ञात करें :

Class	0 – 9	10 - 19	20 – 29	30 – 39	40 – 49	50 – 59
f :	10	15	20	10	5	2

7. फैक्ट्री A तथा फैक्ट्री B में क्रमशः 500 और श्रमिक कार्य करते हैं । उनकी औसत मासिक आय क्रमशः 150 रु० और 200 रु० है । दोनों फैक्ट्रियों के श्रमिकों का सामूहिक मासिक आय ज्ञात कीजिये ।

8. The mean age of all the students of a Class of 50 students is 17 years. If teh mean age of 30 of them is 18 years, determine the mean age of the remaining 20 students.

9. गत सप्ताह कं दिनों का औसत तापमान 5 डिग्री सेन्टीग्रेड था । सतवें दिन के तापमान को जोड़े देने पर पूरे सप्ताह का औसत तापमान बढ़कर 8 डिग्री सेन्टीग्रेड हो गया । सातवें दिन का तापमान ज्ञात कीजिये ।

10. एक स्कूल में 40 लड़के हैं । उनकी औसत उम्र 16 वर्ष है । एक 18 वर्ष का लड़का स्कूल छोड़कर चला जाता है और एक दूसरा उसके स्थान पर चला आता है । औसत बढ़कर 18.88 वर्ष हो जाता है, तो नये लड़के की उम्र बतावें ।

11. एक रेलगाड़ी 30 किलो मी० प्रति घंटे की गति से 40 कि० मी० दौड़ती है, फिर 80 कि० मी० प्रति घंटे की गति से 60 कि० मी० दौड़ती है और फिर पटीर की खराबी के कारण 10 मिनट के लिए 10 कि० मी० प्रति घंटे की दर से दौड़ती है और अन्त में 44 कि० मी० की शेष दूरी 30 कि० मी० प्रति घंटे की दर से तय करती है । प्रति घंटा कि० मी० औसत गति ज्ञात कीजिये ।

12. 20 बोरे गेहूँ 500 रु० प्रति बोरा तथा 20 बोरे गेहूँ 480 रु० प्रति बोरा की दर से खरीदे जाते हैं । गेहूँ की प्रति बोरा औसत कीमत ज्ञात कीजिये ।

13. Compare the results of two colleges from the following data and comment which college gives the bettter result ?

Faculty	College A No. of Students Appeared	College A No. of Students Passed	College B No. of Students Appeared	College B No. of Students Passed
Arts	600	480	100	70
Science	150	135	30	24
Commerce	250	200	70	56
Total	1000	815	200	150

14. Cacluate weighted Mean from the following :

Size :	6	12	18	24	30	36
Weighted :	8	15	22	16	25	14

15. 20 संख्याओं का औसत 30 है । प्रथम 19 संख्याओं का औसत 25 है तो अन्तिम संख्या का मान बतावें ।

गुणोत्तर माध्य

(Geometric Mean)

प्रिय छात्रो,

गत पाठ में हमलोग साधारण तथा भारित अंकगणित माध्य की विस्तृत चर्चा कर चुके हैं । अब इस पाठ में हमलोग गुणोत्तर माध्यों की चर्चा करेंगे ।

गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)–गुणोत्तर माध्य किसी श्रेणी के सभी पद–मूल्यों के गुणनफल का वह मूल (root) होता है जितनी इकाइयाँ उस श्रेणी में रहती हैं । गुणोत्तर माध्य को ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम दी गयी श्रेणी के सभी पदमूल्यों के गुणनफल ज्ञात करते हैं । ततूपश्चात गुणनफल के रूप में प्राप्त संख्या का वह मूल निकाल लेते हैं जितनी कुल इकाइयाँ उस श्रेणी में शामिल रहती हैं । गुणोत्तर माध्य को निम्न सूत्र के सहारे ज्ञात किया जाता है :

$$G.M. = N\sqrt{axbxc \cdots n}$$

यहाँ: G. M. = गुणोत्तर माध्य

a,b,c,n = विभिन्न पदमूल्य

N = श्रेणी में शामिल पदों की कुल संख्या

उदाहरण के लिए, अगर 2, 4 और 8 का गुणोत्तर माध्य निकालना हो तो

$$GM. = N\sqrt{a.b.c \cdots n}$$
$$= 3\sqrt{2 \times 4 \times 8} = 3\sqrt{64}$$
$$= 3\sqrt{4 \times 4 \times 4} = 4.$$

$\therefore$ गुणोत्तर माध्य = 4.

अगर 1,4,5,50 तथा 100 का गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना हो तो :

चूँकि इस श्रेणी में पाँच चर मान दिये हुए हैं अतः इन पाँचों के गुणनफल का पाँचवां मूल निकाला जायेगा अर्थात्

$$G.M. = 5\sqrt{1 \times 4 \times 5 \times 50 \times 100}$$
$$= 5\sqrt{100000}$$

$$G.M. = 5\sqrt{1 \times 4 \times 5 \times 50 \times 100}$$
$$= 5\sqrt{100000}$$
$$= 5\sqrt{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = 10$$

$\therefore$ गुणोत्तर माध्य = 10.

किन्तु जब श्रेणी में पदों की संख्या अधिक हो और उनका मान भी बड़े हों तब उनको गुणा करने तथा उनका मूल निकालने में कठिनाई बहुत बढ़ जाती है । इस कठिनाई को कम करने के लिए वैसी परिस्थितियों में गुणोत्तर माध्य निकालने के लिए लघु गुणकों का उपयोग किया जाता है । इस रीति में प्रत्येक चरमूल्य का लघुगुणक मान (Logarithmic value) लेकर उसे चरमान के सामने एक पृथक स्तम्भ में लिख देते हैं । अंत में सभी लघुगुणक मानों का योग निकालकर उसमें पदों की संख्या से भाग दे देते हैं । इस प्रकार प्राप्त भागफल का प्रति–लघुगुणक (Anti-log) निकाल लेते हैं । यही गुणोत्तर माध्य होता है । इस प्रक्रिया को निम्न सूत्र द्वारा व्यक्त किया जाता है :

$$G.M. = \text{Anti}-\log \text{ of } \frac{\Sigma \log s}{N} \text{ क}$$

यहाँ G.M.= गुणोत्तर माध्य, $\Sigma \log s$ = सभी लघुगणकों का योग तथा N=श्रेणी में स्थित पदों की कुल संख्या ।

ऊपर के सूत्र में लघुगणक तथा प्रति लघुगणक शब्दों का उपयोग किया गया है । अतः सर्व-प्रथम अब हमलोग उनके संबंध में चर्चा करेंगे ।

किसी भी संख्या का लघुगणक 10 पर बैठाया जानेवाला पद घात (Power) है जो उसे उस दी हुई संख्या के बराबर कर दे । उदाहरण के लिए $100=10^2$ अर्थात् 10 पर पावर 2 बैठाने से वह 100 के बराबर हो जाती है । अतः 100 का लघुगणक 2 हुआ । 10 को लघुगणक का आधार कहते हैं । यद्यपि लघुणक का आधार 10 के अतिरिक्त दूसरी भी कोई संख्या हो सकती है किन्तु हमलोग व्यवहार में 10 का उपयोग ही आधार के रूप में अधिक करते हैं । जहाँ लघुगणक का आधार स्पष्ट नहीं दिया हुआ हो वहाँ 10 को ही लघुगणक का आधार माना जाता है । उदाहरण के लिए अगर 1000 हो जायेगा अर्थात् $1000=10^3$ । अतः 1000 का लघुगणक 3 हुआ ।

उपर्युक्त वर्णन से स्पष्ट है कि 100 की लघुगणक 2 है तथा 1000 का लघुगणक 3 है । इसी प्रकार 10 का लधुगणक 1 तथा 1 का लघुगणक 0 होगा । किन्तु 10 और 100 के बीच अथवा 100 और 1000 के बीच स्थित संख्याओं का लघुगणक क्रमशः 1 और 2 के बीच कोई मान और 2 और 3 के बीच कोई मान होगा । इसी प्रकार 10 और 1 के बीच की किसी संख्या का लघुगणक 1 एवं 0 के बीच का मान होगा । दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि किसी भी संख्या के लघुगणक मान में बहुधा कुछ पूर्णांक होता है जिसे दशमलव के बायें लिखा जाता है तथा कुछ दशमलवांश होते हैं जिन्हें दशमलव के दायें लिखा जाता है । लघुगणक का वह भाग जो दशमलव के बायें लिखा जाता है उसे characteristics कहा जाता है और जो भाग दशमलव के दायें लिखा जाता है उसे Mantissa कहते हैं । अर्थात् characteristics तथा Mantissa दोनों मिलकर लघुगणक का निर्माण करते हैं । अतः लघुगणक निकालने के लिए दी गयी संख्या के लिए characteristics का मान तथा Mantissa का मान ज्ञात कर उसे एक साथ लिख दिया जाता है । इन दोनों को ज्ञात करने की अलग-अलग प्रक्रिया व्यवहार में लायी जाती है ।

Characteristics

Characteristics ज्ञात करने के उद्देश्य से हम संख्याओं को दो भागों में बाँटते हैं-प्रथम वे संख्याएँ जिनका मान एक या एक से अधिक हो तथा द्वितीय वे संख्याएँ जिनका मान एक से कम हो अर्थात् जो दशमलव के दायीं ओर ही लिखी जाती हैं ।

प्रथम प्रकार की संख्याओं के लिए characteristics का मान ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का उपयोग करते हैं-

$$\text{Characteristics} = n - 1$$

यहाँ n = दशमलव के बायें लिखे गये अंकों की संख्या । अर्थात् जिन संख्याओं में पूर्णांक हों उनका characteristics पूर्णांक में शामिल अंकों की संख्या में से एक घटाकर ज्ञात कर ली जाती है । निम्न उदाहरण से इसे स्पष्ट किया जा सकता है :

संख्या	Characteristics
8675	4 – 1 = 3
546	3 – 1 = 2
30	2 – 1 = 1
5	1 – 1 = 0
27.3	2 – 1 = 1
158.46	3 – 1 = 2
5312.325	4 – 1 = 3
4120.035	4 – 1 = 3

द्वितीय प्रकार की संख्याएँ अर्थात् जिनका मूल्य एक से कम हो, के लिए Characteristics ज्ञात करने के लिए (n + 1) का उपयोग किया जाता है । यहाँ n का अर्थ दी गयी संख्या में दशमलव एवं प्रथम अंक के मध्य स्थित शून्यों की संख्या है । अर्थात् एक से कम मूल्य वाली संख्याओं का characteristics दशमलव एवं प्रथम सार्थक अंक के बीच स्थित शून्यों की संख्या में एक जोड़ कर प्राप्त कर लिया जाता है । ध्यान रहे ऐसी संख्याओं का characteristics ऋणात्मक होता है । इसे लिखते समय characteristic के ऊपर ऋण (-) का निशान लगा दिया जाता है । निम्न उदाहरणों से इसे स्पष्ट किया जा सकता है :

संख्या	Characteristics
.524	$\bar{1}.$
.0325	$\bar{2}.$
.00659	$\bar{3}.$
.05032	$\bar{2}.$
.0004	$\bar{4}.$

ऊपर के उदाहरण में .524 में दशमलव एवं प्रथम सार्थक अंक (5) के मध्य शून्य की स्थिति Nil है इसमें (Nil+1) अर्थात् एक जोड़कर characteristics प्राप्त किया गया है । दूसरी संख्या में शून्य की संख्या एक है अतः उसका characteristics (1 + 1)=2 हुआ । उसी तरह अन्य संख्याओं के characteristic भी निकाले गये हैं ।

Mantissa का मान लघुगुणक-सारणियों की मदद से देखा जाता है । यह सदा धनात्मक होता है । ऋणात्मक संख्याओं का लघुगणक नहीं निकाला जा सकता । Mantissa देखते समय दी गयी संख्या में दशमलव चिन्ह का कोई ध्यान नहीं रखा जाता । लघुगणक सारणियों से अक्सर चार अंकों वाली संख्याओं का ही Mantissa देखा जा सकता है, अतः वह संख्या जिनका Mantissa देखना हो, अगर चार अंकों से बड़ी हो तो उसका उपसादन (Approximation) कर उसे चार अंकों की बना लेना चाहिए । इसके विपरीत स्थिति में आवश्यकता के अनुसार शून्य बढ़ाकर दी गयी संख्या को चार अंकों की बना लेनी चाहिए । ध्यान रहे बढ़ाने-घटाने का कार्य characteristics के निर्धारण के पश्चात् ही किया जाना चाहिए । लघुगणक सारणी तीन खण्डों में बँटी हुई होती है । इसके प्रथम खण्ड में एक ही स्तम्भ होता है । इसमें 10 से 99 तक दो अंकों वाली संख्याँ क्रमशः लिखी हुई होती हैं । सारणी का दूसरा प्रथम खण्ड वह है जिसमें अलग-अलग 10 स्तम्भ बने होते हैं । प्रत्येक स्तम्भ में 0 से 9 तक के एक-एक अंक लिखे होते हैं । और तीसरा खण्ड भी नौ स्तम्भों में विभक्त होता है, जिनमें प्रत्येक में 1 से 9 तक अंक लिखा जाता है ।

किसी भी संख्या का Mantissa देखने के लिए उस संख्या के प्रथम दो अंकों को लघुगुणक सारणी के प्रथम खण्ड या प्रथम स्तम्भ में खोज लेते हैं । तत्पश्चात दी गयी संख्या के तीसरे अंक को सारणी के द्वितीय खण्ड में स्थित स्तम्भों में से खोजते हैं तथा प्रथम स्तम्भ के सामने लिखा मान कागज पर लिख लेते हैं । अब चौथे अंक को सारणी के तीसरे खण्ड के संबंधित स्तम्भ में देखते हैं । इस चौथे अंक के मान को पूर्व लिखे गये मान में जोड़ देते हैं । यही Mantissa मान होता है । उदाहरण के लिए यदि 3645 का लघुगणक देखना है तो इसका characteristics 3 होगा और Mantissa देखने के लिए प्रथम दो अंक यानी 36 को लघुगणक सारणी के प्रथम स्तंभ में देखेंगे । दी गयी संख्या में तीसरा अंक 4 है अतः 36 के सामने 4 वाले स्तम्भ का मूल्य पढ़ लेंगे जो .5611 है । चौथा अंक 5 है । इसके लिए 36 के सामने किन्तु सारणी में अन्तिम खण्ड में पाँचवें स्तम्भ का मूल्य देखा जायेगा जो 6 है । इस मूल्य को .5611 में जोड़कर Mantissa का मूल्य ज्ञात कर लिया जायेगा जो .5617 होगा । इस प्रकार 3645 होगा । इस प्रकार 3654 का लघुगुणक = 3.5617 ज्ञात कर लिया जायेगा ।

यदि दी गयी संख्या 680.056 है तो characterstic तो 2 होगा और Mantissa 680056 का देखा जायेगा । चूँकि इस संख्या में छः अंक है जबकि लघुगुणक सारणी से चार अंकों वाली संख्या का ही Mantissa देखा जा सकता है अतः इसे उपसादित कर चार अंकों की बना लेंगे। इस प्रकार Mantissa 6801 का देखा जायेगा । प्रथम दो अंक अर्थात् 68 को प्रथम स्तम्भ में निश्चित करते हुए द्वितीय खंड वाले स्तम्भ का तत्संबंधी मान लिख लिया जायेगा जो .8325 है इसमें चौथे अंक 1 का मूल्य जो 1 ही है जोड़ दिया जायेगा । इस प्रकार 680.056 का लघुगुणक =2.8326 हुआ । यदि दी गयी संख्या 87 है तो इसकी characteristic तो 1 होगा और Mantissa देखने के लिए लघुगुणक = 1.9395 हुआ । यहाँ Mantissa देखने के लिए 87 पर एक शून्य बढ़ाकर 870 बना लिया गया है । इसी प्रकार यदि दी गयी संख्या 7 है तो Mantissa देखते समय इस पर एक शून्य बढ़ाकर 70 का Mantissa देखा जायेगा । ध्यान रहे कि 70,700,7000""""सबका Mantissa एक ही होगा ।

यदि दी गयी संख्या .00436 है तो इसका characteristics तो 3 होगा और Mantissa 436 का देखा जायेगा जो .6395 है । अर्थात् .000436 का लघुगुणक = $\bar{3}.6395$ हुआ ।

Anti-logarithm

लघुगुणक मूल्यों से वास्तविक मूल्यों को ज्ञात करने के लिए प्रति-लघुगुणक सारणी का उपयोग किया जाता है । प्रति-लघुगुणक सारणी के सहारे सर्वप्रथम Mantissa अर्थात् दशमलव के बायें लिखी संख्या का Anti-log देखा जाता है । Characteristic का उपयोग तो केवल दशमलव बैठाने के लिए ही किया जाता है । यदि characteristic धनात्मक है तो (n + 1) और यदि characteristic ऋणात्मक है तो (n – 1) का उपयोग करके अन्तिम संख्या में दशमलव बिन्दु का स्थान निश्चित कर लिया जाता है । यहाँ n का अर्थ characteristic के रूप में प्राप्त संख्या का मूल्य है । धनात्मक characteristic की स्थिति में दशमलव दायीं और खिसकता है ओर ऋणात्मक characteristic की स्थिति में दशमलव बायीं ओर खिसकता है । निम्न उदाहरण से इसे स्पष्ट किया जाता है :

Log	Anti-log
2.6342	430.7
1.6342	43.07
3.6342	4307.0
$\bar{1}.6342$	.4307
$\bar{3}.6342$	.004307

गुणोत्तर माध्य की गणना

(1) व्यक्तिगत श्रेणी (Individual Series)–व्यक्तिगत श्रेणी में गुणोत्तर माध्य निकालने के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया अपनायी जाती है :

(i) दिये गये मूल्यों के logs ज्ञात किये जाते हैं ।

(ii) Logs का योग ΣLogs ज्ञात किया जाता है ।

(iii) ΣLogs को पदों की संख्या से भाग दे दिया जाता है ।

(iv) प्राप्त भागफल का प्रति-लघुगुणक निकाल लिया जाता है । यही गुणोत्तर माध्य होता है ।

निम्न उदाहरण से इसे स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण - 1.

निम्न समंकों का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिये ।

X : 5, 25, 45, 8, 100, 150, 175, 4129, 6275, 101564

हल :

X	Logs
5	0.6990
25	1.3979
45	1.6532
8	0.9031
100	2.0000
150	2.1761
175	2,2430
4129	3.615 8
6257	3.7976
101564	5.0069

$N = 10$ $\Sigma Logs = 23.4926$

$$G.M. = \text{Antilog of } \frac{\Sigma logs}{N}$$

$$= \text{Antilog of } \frac{23.4926}{10}$$

= Antilog of 2.34926

= 223.6

$\therefore$ G. M. = 223.6

उदाहरण - 2

निम्नलिखित का गुणोत्तर माध्य ज्ञात करें :

.62, .0783, .0054567, 1.234, 54.65, 674.82, 3403.21, 54302.10, .000823, .0000602

हल:

X	Logs
.62	$\bar{1}.7924$
.0783	$\bar{2}.8938$
005467	$\bar{3}.7378$
1.234	0.0913
54.65	1.7376
674.82	2.8292
3403.21	3.5319
54302.10	4.7348
.000823	$\bar{4}.9154$
.00000602	$\bar{5}.7796$
N = 10	2.0438

$$G.M. = \text{Antilog of } \frac{\Sigma \text{logs}}{N}$$

$$= \text{Antilog of } \frac{2.0438}{10}$$

= Antilog of .20438

= 1.601

$\therefore$ G. M. = 1.601 Ans.

उदाहरण - 3

Calculate Geometric mean of the following :

.8974, .0570, .0081, .5677, .0002, 0984, .0854 and .5672.

हल :

X	Logs
.8974	1.9530
.0570	$\bar{1}.7559$
.0081	$\bar{3}.9085$
.5377	$\bar{1}.7541$
.0002	$\bar{4}.3010$
.0984	$\bar{2}.9930$
.0854	$\bar{2}.9315$
.5672	$\bar{1}.7538$
N = 8	$\Sigma \text{logs} = \overline{10}.3508$

ऊपर के प्रश्न में हम देख रहे हैं कि Σlogs में पूर्णांक अर्थात् Characteristic ऋणात्मक है । अगर ऋणात्मक Characteristic N से पूरा-पूरा कट जाने वाला रहता तब तो कोई समस्या नहीं होती किन्तु यहाँ तो Characteristic ($\overline{10}$) N से पूरा-पूरा नहीं कट रहा है । अत: ऐसी स्थिति में जब Characteristic ऋणात्मक हो और वह N से पूरा-पूरा नहीं कट रहा हो तो Σlogs में ऐसा संशोधन किया जाता है कि Characteristic N से पूरा-पूरा कट जाय और इसी न्यूनतम संख्या को Mantissa में जोड़ दिया जाता है । फिर Characteristic और Mantissa में N से अलग-अलग भार लगाकर भागफल प्राप्त कर लिया जाता है । ऊपर के प्रश्न में Characteristic के मान में से 6 घटाने पर वह -10-6=16 हो जायेगा जो 8 से पूरा-पूरा कट जायेगा । घटायी जाने वाली इसी न्यूनतम संख्या अर्थात् 6 को Mantissa में जोड़कर 6 + .3508 को 8 से भाग दे दिया जायेगा । गणना क्रिया निम्न प्रकार की जायेगी :

$$G.M. = \text{Antilog of } \frac{\text{Slogs}}{N}$$

$$= \text{Antilog of } \frac{10.3508}{8}$$

$$= \text{Antilog of } \frac{-16}{8} + \frac{6.3508}{8}$$

$$= \text{Antilog of } \bar{2}.798$$

$$= .0622$$

$$\therefore \quad G.M. = 0622$$

(2) खण्डित श्रेणी (Discrete Series)–खण्डित श्रेणी में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित प्रक्रियाओं को पूरा किया जाता है :

(i) सर्वप्रथम श्रेणी के सभी मूल्यों को logs ज्ञात किया जाता है ।

(ii) प्रत्येक logs को उससे संबंधित आवृत्ति से गुणा करके गुणनफलों का योग अर्थात् $\Sigma \text{logs} \times f$ प्राप्त कर लिया जाता है ।

(iii) अंत में निम्न सूत्र का उपयोग करके गुणोत्तर माध्य ज्ञात कर लिया जाता है ।

$$G.M. = \text{Antillog of } \frac{\Sigma \log \times f}{\Sigma f \text{ or } N}$$

उदाहरण - 4

निम्न आवृत्ति वितरण का गुणोत्तर माध्य निकालें :

x :	2	4	6	8	10
f :	5	7	8	3	2

हल :

x	f	log (x)	log × f
2	5	0.3010	1.5050
4	7	0.6021	4.2147
6	8	0.7782	6,2256
10	2	1.000	2.0000
N = 25	$\Sigma \log \times f$	=	16.6546

$$G.M. = \text{Antilog of } \frac{\Sigma \log \times f}{N}$$

$$= \text{Antilog of } \frac{16.6546}{25}$$

= Antilog of 0.6662

=4.636

(3) सतत् श्रेणी (Continuous Series)–सतत् श्रेणी में गुणोत्तर माध्य की गणना विधि खण्डित श्रेणी के ही समान है । अन्तर केवल इतना ही है कि दिये गये वर्गान्तरों के मध्य मान सर्वप्रथम ज्ञात कर लिये जाते हैं । इन्हीं मध्य मानों के log देखे जाते हैं और logs को संबंधित आवृत्तियां से गुणा करके $\Sigma \text{logs} \times f$ प्राप्त कर लिया जाता है । अन्त में गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने के लिए उसी सूत्र का उपयोग किया जाता है । जिसका उपयोग खण्डित श्रेणी में हमलोग कर चुके हैं । निम्न उदाहरण से इसे स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण - 5

Compute Geometric Mean of the following series :

Class :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
f :	2	3	4	3	2

हल :

Class	f	Mid values	logs	log × f
0–10	2	5	0.6990	1.3980
10 – 20	3	15	1.1761	3.5283
20 – 30	4	25	1.3979	5.5916
30 – 40	3	35	1.5441	4.6323
40 – 50	2	45	1.6532	3.3064
N = 14				Σlogs × f = 18.4566

$$G.M. = \text{Antilog of } \frac{\Sigma \log . f}{N}$$

$$= \text{Antilog of } \frac{18.4566}{14}$$

$$= \text{Antilog of } 1.3183$$

$$= 20.81$$

$$\therefore \quad G.\ M. = 20.81 \text{ Ans.}$$

भारित गुणोत्तर माध्य

Weighted Geometric Mean

भारित गुणोत्तर माध्य निकालने की प्रक्रिया भी वही है जो अन्य आवृत्ति श्रेणियों में भारित निकालने के लिए उपयोग में लायी जाती है । अन्तर मात्र इतना ही है कि आवृत्ति (f) की जगह पर भार (w) की जगह पर भार (w) का प्रयोग किया जाता है । सर्वप्रथम दिये गये मूल्यों का लघुगुणक (Log) ज्ञात करते हैं । प्रत्येक लघुगुणक को उससे संबंधित भार (w) से गुणा करके प्राप्त गुणनफलों का योग (Σ(logx)w) ज्ञात करते हैं । अन्त में निम्न सूत्र का उपयोग करके भारित गणोत्तर माध्य प्राप्त करते हैं :

$$W.\ G,m = \text{Antilog of } \frac{\Sigma(\log)w}{\Sigma w}$$

यहाँ W. Gm.= भारित गुणोत्तर माध्य

$\Sigma(\log x)w$ = प्रत्येक log एवं तत्संबंधी भार के गुणनफलों का योग, Σw = भारों का योग ।

निम्न उदाहरण से स्थिति हो जायेगी :

उदाहरण - 6

X	:	5	10	15	20	25	30
W	:	8	12	10	10	6	4

हल :

x	w	Logx	(logx)w
5	8	0.6990	5.5920
10	12	1.0000	12.0000
15	10	1.1761	11.7610
20	10	1.3010	13.0100
25	6	1.3979	8.3874
30	4	1.4771	5.9084
	50		5.9084

$$\text{W. Gm.} = \text{Antilog of } \frac{\Sigma(\log x)w}{\Sigma w}$$

$$= \text{Antilog of } \frac{56.6588}{50}$$

$$= \text{Antilog of } 1.1332$$

$$= 13.59$$

$\therefore$ W. Gm. = 13.59 Ans.

सामूहिक गुणोत्तर माध्य
(Combined Geometric Mean)

जब दो या दो से अधिक श्रेणियों के गुणोत्तर माध्य एवं उनमें पदों की संख्या दी हुई हो तो उन सबों का एक सामूहिक गुणोत्तर माध्य निकाला जा सकता है । इसके लिए निम्नलिखित सूत्र का उपयोग किया जाता है :

$$G.M_{12} = \text{Antilog of } \frac{(N_1.\log GM_1) + (N_2.\log G.M_2)}{N_1 + N2}$$

यहाँ :

$G.\ M_{12}$= सामूहिक गुणोत्तर माध्य

$G.\ M_1, GM_2$= दी गयी श्रेणियों के गुणोत्तर माध्य

N_1, N_2 =दी गयी श्रेणियों में इकाइयों की संख्या

निम्न उदाहरण से इसे स्पष्ट किया जा सकता है

उदाहरण - 7

दो समंकों मालाओं जिनका गुणोत्तर माध्य क्रमशः 8 और 5 है तथा जिनमें शामिल इकाइयों की संख्या क्रमशः 4 और 2 है, का सामूहिक गुणोत्तर माध्य ज्ञात करें ।

हल :

$$G.M_{12} = \text{Antilog of } \frac{(N_1.\log GM_1) + (N_2.\log GM_2)}{N_1 + N2}$$

$$= \text{Antilog of } \frac{[4 \times \log 8] + [2 \times \log 5]}{4+2}$$

$$= \text{Antilog of } \frac{[4 \times 0.9031] + [2 \times 0.6990]}{6}$$

$$= \text{Antilog of } \frac{3.6124 + 1.3980}{6}$$

$$= \text{Antilog of } \frac{5.0104}{6}$$

$= \text{Antilog of } 0.8351$

$= 6.841$

$\therefore$ Combined Geometric Mean = 6.841 Ans.

गुणोत्तर माध्य का उपयोग प्रतिशत वृद्धि दरों जैसे-जनसंख्या वृद्धि दर, चक्रवृद्धि, व्याज, मूल्यों में होने वाले प्रतिशत परिवर्तनों आदि से संबंधित दरों को ज्ञात करने के लिए किया जाता है । निम्नलिखित उदाहरण के द्वारा इसे स्पष्ट किया जा सकता है :

उदाहरण - 8

किसी गाँव की जनसंख्या 1930 में 1950 थी । वह 1990 में बढ़कर 3467 हो गयी तो जनसंख्या में वृद्धि की वार्षिक औसत प्रतिशत दर क्या थी ?

हल :

चूँकि जनसंख्या में वृद्धि संचयी प्रभाव की होती है अत: यहाँ औसत वृद्धि दर ज्ञात करने के लिए गुणोत्तर माध्य का उपयोग उपयुक्त होगा । इसके लिए निम्न सूत्र का उपयोग किया जायेगा ।

$$P_n = P_0(1+r)^n \text{ or } r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} - 1$$

जबकि,

P_n = अवधि के अन्त की जनसंख्या = 3467

P_0 = अवधि के प्रारम्भ की जनसंख्या = 1950

r = दर

n = अवधि = (1990-1930)=60

ऊपर के सूत्र के सामने पर

$$r = \sqrt[60]{\frac{3467}{1950}} - 1$$

$$= \left[\text{Antilog of } \frac{\log 3466 - \log 1950}{60}\right] - 1$$

$$= \left[\text{Antillog of } \frac{3.5403 - 3.2900}{60}\right] - 1$$

$$= \left[\text{Antilog of } \frac{.2503}{60} \right] - 1$$

$$= \text{bbc}\left[(\text{Antilog or } 0.004172) - 1\right]$$

$= 1.009 - 1$

$.009$

प्रतिशत वृद्धि $= .009 \times 100 = .9\%$

उदाहरण - 9

The annual rate of output of factory in five years are 5.0, 7.5, 2.5, 5.0, and 10.0 per cent respectively. What is the average rate of growth of output per annuam for the period ?

हल :

Year	out-put	Logs.
I	100 + 5 = 105	2.0212
II	100 + 7.5 = 107.5	2.0314
III	100 + 2.5 = 102.5	2.0106
IV	100 + 5.0 = 105.0	2.0212
V	100 + 10.0 = 110.0	2.0414
		Σlogs = 10.1258

$$Gm = \text{Antilog of } \frac{\Sigma \text{logs}}{N}$$

$$= \text{Antilog of } \frac{10.1258}{5}$$

$$= \text{Antilog of } 2.02516$$

$$= 105.9$$

Rate of growth = 105.9 - 100 = 5.9%

गुणोत्तर माध्य के गुण
(Merits of Geometric Mean)

(1) गुणोत्तर माध्य श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित होता है । अत: यह एक अच्छा प्रतिनिधि मूल्य होता है ।

(2) इसका बीजगणितीय विवेचन किया जा सकता है ।

(3) यह सीमान्त पदों से कम प्रभावित होता है ।

गुणोत्तर माध्य के दोष
(Demerits of Geometric Mean)

(1) इसकी गणना क्रिया जटिल है । इसे समझने के लिए उच्चस्तरीय ज्ञान की आवश्यकता होती है ।

(2) इसकी गणना के लिए श्रेणी के लिए सभी पदों की जानकारी अनिवार्य है ।